KK 238

Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik,

auf hohen Befehl

des

Kais. Kön. wirklichen geheimen Raths, Kommandeur des militarischen Maria Theresia Ordens, Generaldirektors des Genie- und Fortifikationswesens, Generalfeldzeugmeisters, Kommandantens des K. K. Ingenieurs- Mineurs- und Sappeurskorps, auch bestellten Obristen über ein Regiment zu Fuß

Herrn Karl Klement

Grafen von Pellegrini

Exzellenz

zum Gebrauche der kaiserl. königl. Ingenieursakademie,

verfasset

von Mathias Hauser,

Kapitainelieutenant des kaiserl. königl. Ingenieurskorps.

Dritter Theil.

Einleitung zur höheren Geometrie.

Verlegts die kaiserl. königl. Ingenieursakademie.

WIEN,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1786.

Non fumum ex fulgore, sed ex fumo dare lucem.

Horat.

Kern-Kernried'sche Stiftungsbibliothek Augsburg

Vorbericht.

Der Gelehrte mag seines Gegenstandes Wesen ganz erschöpfen, des Lehrers erste Pflicht ist jene auf seinen Schüler zu sehen. Der Beruf seiner Zöglinge, ihre hierzu nöthige Fä-

higkeit und die Dauer ihrer Verwendung müssen den Lehrer in der Auswahl der Materien und ihrer Anordnung, so wie zu der mehr oder weniger ausgedehnten Erläuterung derselben bestimmen.

Der Verfasser.

Inhalt
des dritten Theiles.

Seite

Von der unbestimmten allgemeinen Gleichung des ersten Grades 1

Allgemeine untersuchungen der Gleichung

$$yy = px \pm \frac{pxx}{a}$$ 3

Zeichnung der Kegelschnitte durch gesuchte Punkte 10

Verwandlung der Gleichungen zu den Kegelschnitten 12

Von dem Brennpunkte 16

Von den Fahrstrahlen 20

Zeichnung der Kegelschnitte mittelst der Fahrstrahle durch gesuchte Punkte oder in einem Zuge 24

Inhalt

Seite

Von dem Verhältnisse der Quadrate der Ordinaten zu ihren zugehörigen Rechtecken und dem Verhältnisse jener Quadrate unter sich 26
Von den Gleichungen zur zwoten Achse 28
Von den Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormalen 32
Von den Methoden durch einen gegebenen Punkt eines Kegelschnittes eine Tangente zu führen 42
Von der Assymptote 43
Von der Gleichung der Hyperbel an den Assymptoten 50
Von den Gleichungen der Kegelschnitte zu ihren durchmessern und den daraus folgenden Eigenschaften 53
Verschiedene Aufgaben 62
Von der gleichseitigen Hyperbel 66
Von den verwandten Hyperbeln 68
Von dem Flächeninhalte der Kegelschnitte 69
Von dem Inhalte der durch Kegelschnitte erzeugten Körper 70
Von den Kegelschnitten in dem Kegel selbst betrachtet 73
Von einigen nothwendigen trigonometrischen Formeln . . . 76
Von dem Unendlichkleinen und Unendlichgroßen 81
Von der geraden Methode der Reihen 83
Von der umgekehrten Methode der Reihen 90
Anwendung der Reihen auf die Berechnung der Logarithmen 93
Anwendung der Reihen auf die Entwicklung der Potenzen mehrtheiliger Ausdrücke 98
Von den Eigenschaften der höheren Gleichungen 103
Von der Auflösung der höheren Gleichungen 113
Von der Differenzialrechnung 118
Von den zweyten, dritten und höheren Differenzialen 121
Von dem Differenziale der Trigonometrischen Funktionen. 124
Von dem Differenziale der Kreisbögen 126

Von

Inhalt

Seite

Von dem Differenziale der Logarithmen. 130
Von dem Differenziale der Exponentialgrößen. 136
Anwendung auf die Methoden die Tangente, Subtangente, Normal und Subnormal zu bestimmen. 137
Von der Methode das Größte und Kleinste zu bestimmen. 147
Von dem Krümmungshalbmesser. 158
Von dem Werthe der Brüche, deren Zähler und Nenner = o sind. 162
Von der Methode die Kreisbögen durch Sinusse oder Tangenten und diese durch jene zu bestimmen. 164
Von der Integralrechnung. 168
Von dem Integrale des zweytheiligen Differenzials $x^n dx(a+bx^m)^q$. 172
Von dem Integriren durch Kreisbögen. 183
Von dem Integriren durch Logarithmen. 184
Von der Methode das verlangte Integrale durch ein schon bekanntes zu bestimmen. 186
Von dem Integriren der rationalen Brüche. 201
Von dem Integriren der Differenzialen, welche Logarithmen enthalten. 210
Von dem Integriren der Differenzialen, welche Exponentialgrößen enthalten. 213
Von dem Integriren der Differenzialen, welche Sinus und Kosinus enthalten. 215
Von dem Inhalte der durch krumme Linien begränzten Flächen. 220
Von der Rektification der Krummen. 227
Von der Berechnung der körperlichen Inhalte. 239
Von der Berechnung der Oberflächen der durch die Flächenumdrehung entstandenen Körper. 243
Von dem Integriren der Differenzialgrößen, welche mehrere Veränderlichen enthalten. 250
Von den Differenzialgleichungen. 253
Von der umgekehrten Methode der Tangenten. 259

Inhalt

Seite

Von der sphärischen Trigonometrie 262

Von den rechtwinklichten Dreyecken 266

Auflösung derselben 269

Von den schiefwinklichten Dreyecken 270

Auflösung derselben 274

Von

Von den Kegelschnitten.

1.

Es sey die unbestimmte allgemeine Gleichung des ersten Grades Fig. 1. 2.

$$y = \frac{px}{a} \pm n$$

auf der Geraden OT dergestalt auszuführen, daß die bejahenden Werthe der Veränderlichen x auf OT von O an gegen T zu fallen, die bejahenden Werthe der Veränderlichen y aber senkrecht auf OT stehen.

Weil $a : p = x : \frac{px}{a}$, und y im ersten Falle die Summe und im 2ten Falle der Unterscheid von $\frac{px}{a}$ und n ist; so findet man den geometrischen Ort dieser Gleichung, wenn man die auf OT Senkrechte $O1 = n$ für den ersten Fall Fig. 1. auf die bejahende Seite der Veränderlichen y, und für den zweyten Fall Fig. 2. auf die entgegengesetzte Seite trägt, die mit OT Gleichlaufende $13 = a$ und die auf 13 Senkrechte $34 = p$ nimmt, und noch durch die Punkte 1 und 4 die Gerade Sq zieht. Denn führet man durch je-

den Punkt 6 der Geraden Sq oder durch jeden Punkt 5 der Geraden OT die auf OT Senkrechte 6 5; so geben die ähnlichen Dreyecke 1 3 4 und 1 7 6.

$$a : p = x : 6\,7, \text{ folglich}$$

$$6\,7 = \frac{px}{a} \text{ und}$$

$$5\,7 = o\,1 = n, \text{ also}$$

Fig. 1. $y = \frac{px}{a} + n$ und

Fig. 2. $y = \frac{px}{a} - n.$

Die Werthe von y werden **Ordinaten** jene von x **Abscissen**, der Punkt o ihr **Ursprung**, und die Gerade OT die **Abscissenlinie** genennt.

Wird umgekehrt der geometrische Ort Sq nebst der Abscissenlinie OT und dem Ursprunge o der Abscissen gegeben; so erhält man die Gleichung, wenn man die auf OT Senkrechte o 1, die mit OT Gleichlaufende 1 2, und durch jede zween Punkte 4 und 6 der Geraden Sq die auf 1 2 Senkrechten 4 3 und 6 5 zieht, und noch o 1 = n, 1 3 = a, 4 3 = p, 6 5 = y und o 5 = x setzet.

Denn die ähnlichen Dreyecke 1 3 4, und 1 7 6 geben

Fig. 1. $a : p = x : y - n$ und

Fig. 2. $a : p = x : y + n$, also

$$ay - an = px \text{ oder}$$

$$ay + an = px, \text{ folglich}$$

$$y = \frac{px}{a} \pm n.$$

Da jede unbestimmte Gleichung des ersten Grades durch diese allgemeine vorgestellt wird; so ist der geometrische Ort einer Gleichung des ersten Grades allemal eine gerade Linie, und die Gleichung, welche zu einer geraden Linie gehört, allemal vom ersten Grade. Folglich kann eine krumme Linie nur der geometrische Ort einer Glei-

chung von einem höhern Grade seyn, und jede Gleichung eines höhern Grades nur zu einer krummen Linie gehören.

2. Der geometrische Ort dieser Gleichung

$$yy = px \pm \frac{pxx}{a}$$

heißt Kegelschnitt. Man wird in der Folge zeigen, daß wenn ein rechter Kegel von einer Ebene anders, als durch die Achse geschnitten ist, der Durchschnitt dieser Ebene und des Kegels Oberfläche allemal durch diese Gleichung ausgedrücket wird.

Nachdem a = ∞ ist, nur —, oder nur + gilt; so wird

$$yy = px$$

$$yy = px - \frac{pxx}{a} \text{ oder}$$

$$yy = px + \frac{pxx}{a}$$

Und die krumme heißt **Parabel, Ellipse** oder **Hyperbel;** weil nach der Bedeutung dieser griechischen Wörter yy im ersten Falle dem Rechtecke px gleich, im 2ten Falle um $\frac{pxx}{a}$ kleiner als px und im 3ten Falle um $\frac{pxx}{a}$ größer als px ist.

Setzet man im 2ten oder 3ten Falle

$$a = p; \text{ so wird}$$

$$yy = ax - xx \text{ oder}$$

$$yy = ax + xx.$$

Und die Krumme heißt **Kreis** oder **gleichseitige Hyperbel.**

Man wird unten besonders untersuchen in wie ferne diese letztere von der gemeinen Hyperbel abweicht, die Eigenschaften des Kreises aber zu mehrerer Aufklärung des Schülers ebenfalls aus seiner Gleichung herleiten, und

nie, ausser wenn von den andern Krummen die Rede ist, als bekannt voraussetzen.

Die Parabel kann allzeit als eine Ellipse, oder als eine Hyperbel, worinn $a = \infty$ ist, und der Kreis als eine Ellipse worinn $a = p$ ist, angesehen werden.

Fig. 3. 4. 3. **Die bejahenden Abscissen werden von O gegen T genommen; man suche die Punkte, welche eine jede aus diesen krummen mit der Abscissenlinie OT gemein hat.**

Weil y den senkrechten Abstand eines jeden Punktes der krummen von der Abscissenlinie OT bedeutet; so wird für alle Punkte der Krummen, welche in OT liegen, $y = 0$, folglich

Für die Parabel.

$$0 = px$$
$$x = 0$$

Für den Kreis

$$0 = ax - xx$$
$$xx = ax$$
$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4}}$$
$$x = 0 \text{ und}$$
$$x = a$$

Für die Ellipse

$$0 = px - \frac{pxx}{a}$$
$$\frac{pxx}{a} = px$$
$$xx = ax$$
$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4}}$$
$$x = 0 \text{ und}$$
$$x = a$$

Für die Hyperbel

$$0 = px + \frac{pxx}{a}$$

$$\frac{pxx}{a} = -px$$

$$xx = -ax$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4}}$$

$$x = 0 \text{ und}$$

$$x = -a.$$

Man nehme oi = a für den Kreis und die Ellipse von o gegen T und für die Hyperbel auf der entgegengesetzten Seite in Ansehung T; so geht eine jede aus diesen Krummen durch die beyden Ende von a. Fig. 3. 4.

Da a für den Fall der Parabel unendlich groß wird; so kann diese Krumme auch nicht mehr als das eine End von a, den Ursprung o, mit der Abscissenlinie OT gemein haben.

Weil die Gleichungen des ersten Grades für die Unbekannte nur einen Werth, die vermischten quadratischen aber allemal zween verschiedene Werthe geben; so läßt sich schon vor der Rechnung einsehen, daß die Parabel nur einen, die 3 übrigen Krummen aber zween Punkte mit OT gemein haben.

4. Nach welchen Seiten werden sich diese Krummen ausdehnen können?

Wo immer ein Punkt der Krummen seyn kann; so ist auch von diesem Punkte eine Ordinate y auf OT möglich; y aber ist nach der Natur dieser Gleichungen nur möglich, so lange yy bejahend bleibt, folglich so lange als

Für die Parabel

$$px > 0$$

$$x > 0$$

Für den Kreis

$$ax > xx$$

$$a > x$$

Für die Ellipse

$$px > \frac{pxx}{a}$$

$$ax > xx$$
$$a > x$$ und

Für die Hyperbel

$$px + \frac{pxx}{a} > o$$ ist,

welcher Ausdruck für ein bejahendes x allemal bejahend ist.

Setzet man x verneinend; so verwandeln sich die vier Gleichungen in folgende

$$yy = - px$$
$$yy = - ax - xx$$
$$yy = - px - \frac{pxx}{a}$$
$$yy = - px + \frac{pxx}{a}$$

Die 3 erstern geben yy allzeit verneinend und die letzte yy nur bejahend, wenn

$$\frac{pxx}{a} > px$$
$$xx > ax$$
$$x > a$$ ist.

Zieht man also durch die Punkte o und 1 die Senkrechten auf OT; so fallen alle Punkte der Parabel nur auf eine Seite der durch o geführten Senkrechten gegen T, alle Punkte des Kreises und der Ellipse nur zwischen, und alle Punkte der Hyperbel nur beederseits ausser diese Senkrechten.

5. Sucht man den Werth von y aus jeder Gleichung, so erhält man

$$y = \pm \sqrt{px}$$
$$y = \pm \sqrt{ax - xx}$$
$$y = \pm \sqrt{px - \frac{pxx}{a}}$$ und
$$y = + \sqrt{px + \frac{pxx}{a}}$$

Daher

Daher entsprechen jeder Abscisse zwo gleiche und entgegengesetzte Ordinaten. Oder die Abscissenlinie theilet eine jede aus diesen Krummen in zween vollkommen gleiche Theile.

6. **Fragt man, ob es zu verschiedenen Abscissen auch gleiche Ordinaten giebt;** so setzet man zwo Ordinaten y und z einander gleich, und bestimmt nach der Natur jeder Krummen die Abscisse x der ersten durch die Abscisse u der andern Ordinate.

Diesem zu Folge ist

Für die Parabel — Fig. 5

$yy = px$ und

$zz = pu$, also

$px = pu$

$x = u$

Für den Kreis ist

$yy = ax - xx$ und

$zz = au - uu$, also

$ax - xx = au - uu$

$xx = ax - au + uu$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - au + uu}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{a}{2} - u\right)$$

$x = a - u$ und

$x = u$

Für die Ellipse ist

$$yy = px - \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

$$zz = pu - \frac{puu}{a}, \text{ also}$$

$$px - \frac{pxx}{a} = pu - \frac{puu}{a}$$

$ax - xx = au - uu$

$$xx = ax - au + uu$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - au + uu}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{a}{2} - u\right)$$

$x = a - u$ und

$x = u$

Für die Hyperbel ist

$$yy = px + \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

$$zz = pu + \frac{puu}{a}, \text{ also}$$

$$px + \frac{pxx}{a} = pu + \frac{puu}{a}$$

$$ax + xx = au + uu$$

$$xx = -ax + au + uu$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + au + uu}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \left(\frac{a}{2} + u\right)$$

$x = a$ und

$x = -a - u.$

Fig. 3. In der Parabel giebt es also zu verschiedenen Abscis-
4. sen keine gleiche Ordinaten, in den 3 übrigen Krummen aber sind jene Ordinaten, welche von den Enden der Beständigen a gleichweit abstehen, gleich. a wird der Krummen **erste Achse**, p **ihr Parameter**, und jener Punkt, welcher a halbirt, der Krummen **Mittelpunkt** genennt.

Die vom Mittelpunkte gleichentfernten Ordinaten sind also gleich. Und die Parabel hat immer zween, die 3 übrigen Krummen aber immer vier Punkte, welche von der Abscissenlinie gleichweit abstehen.

7. **Um zu untersuchen, wozu diese Krummen sich von der Abscissenlinie entfernen oder sich der-**

selben

selben nähern, muß man bestimmen, wozu die Ordinaten wachsen oder abnehmen.

Diese Ordinaten wachsen oder nehmen ab

In der Parabel

Nachdem px oder

x

In dem Kreise

Nachdem $ax - xx$ oder

$(a - x)\,x$

In der Ellipse

Nachdem $px - \frac{pxx}{a}$

$x - \frac{xx}{a}$

$ax - xx$ oder

$(a - x)x$

In der Hyperbel für die bejahenden x

Nachdem $px + \frac{pxx}{a}$

$x + \frac{xx}{a}$

$ax + xx$ oder

$(a + x)\,x$

und für die verneinenden x

Nachdem $-px + \frac{pxx}{a}$

$-x + \frac{xx}{a}$

$-ax + xx$ oder

$(-a + x)x$

wächst oder abnimmt.

Wenn x größer wird; so wird jeder Faktor dieser Produkte

$(a + x)x$ und

$(-a + x)x$,

also auch das Produkt größer.

Das Produkt (a — x) x aber besteht aus zween Faktoren, deren Summe beständig = a bleibt; es wird also größer jemehr seine Faktoren sich zur Gleichheit nähern, und am größten, wenn seine Faktoren gleich sind. Es sey daher

$$x = a - x;$$

so ist $x = \frac{a}{2}$ der Ausdruck für die Abscisse, welche der gröſten Ordinate entspricht.

Die Ordinaten werden also immer größer und unendlich groß, nachdem sie sich in der Parabel von dem Ursprunge der Abscissen, und in der Hyperbel beederseits vom Mittelpunkte immer mehr und bis ins Unendliche entfernen. In dem Kreise und in der Ellipse aber geht die gröſte Ordinate durch den Mittelpunkt, und die übrigen sind desto kleiner je weiter sie beederseits von dem Mittelpunkte abstehen.

Hieraus erhellt, daß jede mit der Abscissenlinie Gleichlaufende die Parabel allzeit in einem, und die Hyperbel in zween Punkten schneide, den Kreis und die Ellipse aber nirgends begegne, berühre, oder auch in zween Punkten schneide, nachdem ihre Entfernung von der Abscissenlinie grösser, gleich, oder kleiner, als die größte Ordinate ist.

8. Man soll eine jede aus diesen 4 Krummen durch gesuchte Punkte zeichnen.

Nimmt man mehrere x nach Belieben an, sucht für jedes x sein zugehöriges y, und hängt die Ende dieser durch eine Linie zusammen; so ist die Zeichnung fertig.

Für den Kreis sey daher

1tens $x = \frac{a}{2}$; so ist

$$yy = \frac{aa}{2} - \frac{aa}{4}$$

$$yy = \frac{aa}{4} \text{ und}$$

$$y = \pm \frac{a}{2}$$

Man

Man führe durch den Mittelpunkt eine Senkrechte und trage beederseits $\frac{a}{2}$ auf dieselbe; so hat man schon 4 Punkte, welche zur Krummen gehören. Fig. 6.

Setzet man 2tens

$$x = \frac{a}{4}; \text{ so ist}$$

$$yy = \frac{aa}{4} - \frac{aa}{16}$$

$$yy = \frac{3aa}{16}$$

$$y = \pm \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

Nimmt man also für $x = \frac{a}{4}$ und $x = \frac{3a}{4}$ die Senkrechte $y = \pm \frac{a}{4}\sqrt{3}$; so erhält man abermal 4 Punkte der Krummen. Eben so findet man die Ordinate für $x = \frac{a}{8}$ oder $\frac{7a}{8}$, für $x = \frac{3a}{8}$ oder $\frac{5a}{8}$, und so fort.

Für die Parabel ist Fig. 7.

$$yy = px, \text{ also}$$

verhält sich $p : y = y : x$

Nimmt man also $0\ 1 = p$, zieht OV senkrecht auf OT, und beschreibt aus den Punkten 2 mit beliebigen Halbmessern $2\ 1 > \frac{p}{2}$ Kreise; so schneidet jeder Umfang auf OT eine Abscisse 0 3, 0 4, 0 5 und auf OV ihre zugehörige Ordinate 06, 07, 08 ab, u. s. w.

Für die Ellipse ist

$$yy = px - \frac{pxx}{a}, \text{ also verhält sich}$$

$$p : y = y : x - \frac{xx}{a}.$$

Und

Und für die Hyperbel ist

$$yy = px + \frac{pxx}{a}, \text{ also verhält sich}$$

$$p : y = y : x + \frac{xx}{a}.$$

Fig. 8. Suchet man also zu a und einem beliebigen x eine dritte Proportionirte $\frac{xx}{a}$, und sodann für die Ellipse zwi-

Fig. 9. schen p und $x - \frac{xx}{a}$ oder für die Hyperbel zwischen p und $x + \frac{xx}{a}$ eine mittlere Proportionirte; so erhält man die Ordinate, welche dem angenommenen x entspricht, und gehörig aufgetragen 4 Punkte der Krummen giebt.

Diese Methode, die krummen durch gesuchte Punkte zu zeichnen, ist so gar auf dem Papiere noch richtiger als jede andere, welche zusammengesetzte Instrumente erfordert. Sonst ist diese Methode allein anwendbar, indem bey jeder Ausübung den Handwerksleuten immer nur mehrere Punkte der krummen bestimmet werden müssen. Uebrigens sieht man leicht ein, daß sie auf jede Krumme, wovon die Gleichung bekannt ist, passet, und wenn die Beständigen a und p in Zahlen gegeben sind, blos ein Werk der Rechnung wird.

9. Man soll diese Gleichungen in jene verwandeln, welche die Abscissen vom Mittelpunkte an rechnen.

Nennt man diese neue Abscissen u; so giebt, der durch u und $\frac{a}{2}$ bestimmte Werth von x, anstatt x gesetzet, die verlangten Gleichungen.

Fig. 10. Für den Kreis ist

$$x = \frac{a}{2} - u \text{ und}$$

$$yy = ax - xx, \text{ also}$$

yy

$$yy = \frac{aa}{2} - au - \frac{aa}{4} + au - uu \text{ oder}$$

$$yy = \frac{aa}{4} - uu$$

Für die Ellipse ist

$$x = \frac{a}{2} - u \text{ und}$$ Fig. 11.

$$yy = px - \frac{pxx}{a}, \text{ also}$$

$$yy = \frac{ap}{2} - pu - \frac{ap}{4} + pu - \frac{puu}{a} \text{ oder}$$

$$yy = \frac{ap}{4} - \frac{puu}{a}$$

Für die Hyperbel ist

$$x = u - \frac{a}{2} \text{ und}$$ Fig. 12.

$$yy = px + \frac{pxx}{a} \text{ also}$$

$$yy = pu - \frac{ap}{2} + \frac{puu}{a} - pu + \frac{ap}{4} \text{ oder}$$

$$yy = \frac{puu}{a} - \frac{ap}{4}.$$

Läßt man nun x eben das, was u bedeutet, gelten; so sind die verlangten Gleichungen

Für den Kreis

$$yy = \frac{aa}{4} - xx$$

Für

Für die Ellipse

$$yy = \frac{ap}{4} - \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

Für die Hyperbel

$$yy = \frac{pxx}{a} - \frac{ap}{4}.$$

10. Wird in diesen drey letzten Gleichungen $y = 0$; so findet man aus einer jeden $x = \pm \frac{a}{2}$. Folglich geht eine jede aus diesen drey Krummen durch die beyden Ende von a. wie oben.

Setzet man den bejahenden Theil des Werthes von yy grösser als den verneinenden Theil; so findet man für die möglichen Ordinaten in dem Kreise und der Ellipse $x < \pm \frac{a}{2}$ und in der Hyperbel $x > \pm \frac{a}{2}$.

Also fallen alle Punkte der zwo erstern Krummen zwischen, und alle Punkte dieser letztern ausser die Senkrechten, welche man durch die beyden Ende von a führt. wie oben.

Zieht man aus beyden Gliedern dieser Gleichungen die Wurzel aus; so findet man für jede Abscisse zwo gleiche und entgegengesetzte Ordinaten. wie oben.

Bestimmt man für zwo gleiche Ordinaten y und z, die Abscisse x der ersten durch die Abscisse u der zwoten; so erhält man $x = \pm u$. Folglich sind die Ordinaten in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte gleich. wie oben.

Weil der veränderliche Theil des Werthes von yy in den zwo ersten Gleichungen verneinend und in der dritten bejahend ist; so erhellet, daß die Ordinaten des Kreises und der Elipse abnehmen, jene der Hyperbel aber wachsen, je mehr sie sich vom Mittelpunkte entfernen. wie oben.

Fig. 14. 15. 16. 11. Man nehme $b = \sqrt{ap}$, und trage $\frac{b}{2}$ beederseits auf die durch den Mittelpunkt 2 geführte Senkrechte

34; so heißt b, also aufgetragen, der Krummen **zwote Achse.**

Die Parabel hat keine bestimmte erste Achse, kein Mittelpunkt, also auch keine zwote Achse: und weil im Kreise $a = p$ ist; so wird auch seine zwote Achse b der ersten a gleich.

Weil $b = \sqrt{ap}$; so verhält sich

$$a : b = b : p$$

Und setzet man eben so

$$b : a = a : q$$

so heißt q der **Parameter der zwoten Achse.**

Die dritte Proportionirte zu beeden Achsen ist also der Parameter von jener Achse, welche das erste Glied der Proportion ausmacht.

Setzt man in den Gleichungen der Ellipse und Hyperbel

$$yy = px - \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

$$yy = px + \frac{pxx}{a} \text{ oder}$$

$$yy = \frac{ap}{4} - \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

$$yy = \frac{pxx}{a} - \frac{ap}{4}$$

anstatt p seinen Werth $\frac{bb}{a}$; so erhält man folgende **Gleichungen zu den Achsen.**

$$yy = \frac{bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa} \text{ und}$$

$$y = \frac{bbx}{a} + \frac{bbxx}{aa} \text{ oder}$$

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa} \text{ und}$$

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

Um

Um dem Leser nicht beschwerlich zu fallen, wird man alle Eigenschaften dieser Krummen nur aus folgenden Gleichungen herleiten.

$$yy = px$$

$$yy = ax - xx$$

$$yy = px - \frac{pxx}{a}$$

$$yy = px + \frac{pxx}{a} \text{ oder}$$

$$yy = \frac{aa}{4} - xx$$

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}$$

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

Die 4 ersten rechnen die Abscissen vom Ursprunge, die 3 letzteren aber vom Mittelpunkte an.

12. **Der Brennpunkt** ist jener Punkt der Abscissenlinie, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich wird.

Setzet man also in einer jeden aus den 4 ersten Gleichungen anstatt y seinen Werth $\frac{p}{2}$; so erhält man die Entfernung x des Brennpunktes von dem Ursprunge der Abscissenlinie.

Für die Parabel ist

$$yy = px, \text{ also}$$

$$\frac{pp}{4} = px \text{ und}$$

$$x = \frac{p}{4}$$

Für den Kreis ist

$$yy = ax - xx, \text{ und}$$

$$p = a, \text{ also}$$

$$\frac{aa}{4} = ax - xx$$

$$xx = ax - \frac{aa}{4}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - \frac{aa}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2}$$

Für die Ellipse ist

$$yy = px - \frac{pxx}{a}, \text{ also}$$

$$\frac{pp}{4} = px - \frac{pxx}{a}$$

$$\frac{p}{4} = x - \frac{xx}{a} \text{ und}$$

$$p = \frac{bb}{a}, \text{ folglich}$$

$$\frac{bb}{4a} = x - \frac{xx}{a}$$

$$\frac{bb}{4} = ax - xx$$

$$xx = ax - \frac{bb}{4}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - \frac{bb}{4}}$$

Für die Hyperbel ist

$$yy = px + \frac{pxx}{a}, \text{ also}$$

$$\frac{pp}{4} = px + \frac{pxx}{a}$$

$$\frac{p}{4} = x + \frac{xx}{a} \text{ und}$$

$$p = \frac{bb}{a}, \text{ folglich}$$

$$\frac{bb}{4a} = x + \frac{xx}{a}$$

$$\frac{bb}{4} = ax + xx$$

$$xx = - ax + \frac{bb}{4}$$

$$x = - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}}$$

Fig. 13. Man trage vom Scheitel der Parabel $\frac{p}{4}$ auf die bejahende Seite der Abscissen; so erhält man derselben Brennpunkt 5.

Fig. 14. Weil im Kreise für den Brennpunkt $x = \frac{a}{2}$ ist; so fällt derselbe in den Mittelpunkt.

Fig. 15. Für den Brennpunkt der Ellipse ist $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - \frac{bb}{4}}$. Da nun $\frac{a}{2}$ von o bis zum Mittelpunkte 2 reichet; so muß man von diesem Punkte 2 an beederseits noch $\sqrt{\frac{aa}{4} - \frac{bb}{4}}$ die Kathede des rechtwinklichten Dreyeckes, dessen Hypothenuse $\frac{a}{2}$ und die andere Kathede $\frac{b}{2}$ ist, auftragen.

Man beschreibe also aus dem Ende 3 der kleinen Achse b mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$ einen Bogen; so wird

dieser

dieser auf der grossen Achse die zween Brennpunkte 5 und 6 bestimmen.

Ist b größer als a; so wird $\sqrt{\frac{aa}{4}-\frac{bb}{4}}$ eine unmögliche Größe. Wirklich kann jener Bogen die Achse a in diesem Falle nicht mehr erreichen.

Folglich hat die kleine Achse der Elipse keine Brennpunkte.

Ist b = a; so wird $\sqrt{\frac{aa}{4}-\frac{bb}{4}} = 0$, und jener Bogen berührt die Achse in dem Mittelpunkte. Sobald also die Elipse sich in einen Kreis verwandelt; so fallen ihre Brennpunkte in dem Mittelpunkte zusammen.

Für den Brennpunkt der Hyperbel ist $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4}+\frac{bb}{4}}$. Da nun $-\frac{a}{2}$ wieder von 0 an bis in den Mittelpunkt 2 reichet; so hat man von diesem Punkte 2 an beederseits noch $\sqrt{\frac{aa}{4}+\frac{bb}{4}}$ die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyeckes, dessen Katheden $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ sind, aufzutragen. Man beschreibe also aus dem Mittelpunkte 2 mit dieser Hypothenuse 0 3 einen Halbkreis; so wird dieser die Brennpunkte 5 und 6 auf der Abscissenlinie bestimmen. Fig. 16.

Die Entfernung der Brennpunkte von dem Mittelpunkte ist also in der Elipse $= \sqrt{\frac{aa}{4}-\frac{bb}{4}}$ kleiner, und in der Hyperbel $= \sqrt{\frac{aa}{4}+\frac{bb}{4}}$ größer als $\frac{a}{2}$.

Setzet man in diesen Gleichungen

$$yy = \frac{aa}{4} - xx$$

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa} \text{ und}$$

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

um die Brennpunkte zu finden $\frac{pp}{4}$, oder in der ersten $\frac{aa}{4}$ und in den zwo letzten $\frac{b^4}{4aa}$ anstatt yy: so erhält man aus der ersten $x = 0$, aus der zwoten $x = \pm\sqrt{\frac{aa}{4} - \frac{bb}{4}}$ und aus der dritten $x = \pm\sqrt{\frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}}$. Welche Auflösung mit der vorigen übereinstimmt.

Wenn man die Parabel und den Kreis als eine Ellipse betrachtet; so haben diese Krummen ebenfalls zween Brennpunkte; aber der Abstand dieser Brennpunkte von einander ist in jener unendlich groß und in dieser unendlich klein.

13. Die Geraden, welche man von einem Punkte der Krummen bis in ihre Brennpunkte zieht, heißen **Fahrstrahle**.

Weil die beeden Brennpunkte des Kreises mit dem Mittelpunkte nur einen und denselben ausmachen; so kann von jedem Punkte des Umfanges nur ein Fahrstrahl gezogen werden. Und weil der Abstand der Brennpunkte in der Parabel unendlich groß ist; so wird der eine Fahrstrahl mit der Abscissenlinie gleichlaufend und ebenfalls unendlich groß.

14. **Man suche für die Fahrstrahle einen allgemeinen Ausdruck, welcher die Ordinate y nicht enthält.**

Bey jeder Untersuchung muß man die in der Aufgabe genannten Linien und durch alle genannten Punkte der Krummen die Ordinaten ziehen. Ist dieses geschehen, und man setzet den kleinern Fahrstrahl 75 = n und den grössern 76 = m; so giebt das rechtwinklichte Dreyecke 785 oder 786 eine Gleichung für n oder m, in welcher man anstatt yy seinen Werth setzen, und folglich n oder m ohne y bestimmen kann. Fig. 17. 18. 19. 20.

Für die Parabel ist

$$yy = px, \text{ und}$$

$$nn = yy + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2, \text{ also}$$

$$nn = px + xx - \frac{px}{2} + \frac{pp}{16}$$

$$nn = xx + \frac{px}{2} + \frac{pp}{16}$$

$$n = x + \frac{p}{4}$$

Für den Kreis ist

$$yy = \frac{aa}{4} - xx \text{ und}$$

$$nn = yy + xx, \text{ also}$$

$$nn = \frac{aa}{4}$$

$$n = \pm \frac{a}{2}$$

Für die Ellipse ist

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa} \text{ und}$$

1tens $nn = yy + \left(\sqrt{\frac{aa - bb}{4}} - x\right)^2$

$$nn = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa} + \frac{aa}{4} - \frac{bb}{4} - x\sqrt{aa-bb} + xx$$

$$nn = \frac{aa}{4} - x\sqrt{aa-bb} + \left(\frac{aa-bb}{aa}\right)xx$$

$$n = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a} \text{ oder}$$

$$n = \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a} - \frac{a}{2}$$

je nachdem der erste oder der zweyte Ausdruck bejahend ist. Es ist aber

$$\frac{a}{2} > x \text{ und}$$

$$a > \sqrt{aa-bb}, \text{ also auch}$$

$$\frac{aa}{2} > x\sqrt{aa-bb}$$

$$\frac{a}{2} > \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a}, \text{ folglich}$$

allzeit $n = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a}$

2tens ist $mm = yy + \left(\sqrt{\frac{aa-bb}{4}} + x\right)^2$, also

$$mm = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa} + \frac{aa}{4} - \frac{bb}{4} + x\sqrt{aa-bb} + xx$$

$$mm = \frac{aa}{4} + x\sqrt{aa-bb} + \left(\frac{aa-bb}{aa}\right)xx$$

$$m = \frac{a}{2} + \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a}$$

Für die Hyperbel ist

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4} \text{ und}$$

1tens

1tens $nn = yy + \left(x - \sqrt{\frac{aa+bb}{4}}\right)^2$, also

$$nn = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4} + xx - x\sqrt{aa+bb} + \frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}$$

$$nn = \frac{aa}{4} - x\sqrt{aa+bb} + \left(\frac{aa+bb}{aa}\right)xx$$

$$n = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{aa+bb}}{a} \text{ oder}$$

$$n = \frac{x\sqrt{aa+bb}}{a} - \frac{a}{2}$$

je nachdem der erste oder zweyte Ausdruck bejahend ist. Es ist aber

$$x > \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$\sqrt{aa+bb} > a, \text{ also auch}$$

$$x\sqrt{aa+bb} > \frac{aa}{2}$$

$$\frac{x\sqrt{aa+bb}}{a} > \frac{a}{2}, \text{ folglich}$$

allzeit $n = \frac{x\sqrt{aa+bb}}{a} - \frac{a}{2}$

2tens ist $mm = yy + \left(x + \sqrt{\frac{aa+bb}{4}}\right)^2$, also

$$mm = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4} + xx + x\sqrt{aa+bb} + \frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}$$

$$mm = \frac{aa}{4} + x\sqrt{aa+bb} + \left(\frac{aa+bb}{aa}\right)xx$$

$$m = x\sqrt{aa+bb} + \frac{a}{2}$$

In dem Kreise ist jeder Fahrstrahl $n = \frac{a}{2}$. Daher ist man leicht auf das einfache Instrument, den Zirkel, womit diese Krumme beschrieben wird, verfallen.

Fig. 21. In der Parabel ist $n = x + \frac{p}{4}$.

Nimmt man also $o\,1 = o\,2 = \frac{p}{4}$,

zieht auf die Abscissenlinie verschiedene Senkrechten 3d, 4d, 5d, und schneidet aus dem Brennpunkte 2 die erste mit dem Halbmesser 31, die zwote mit dem Halbmesser 41 und die dritte mit dem Halbmesser 51 beederseits in d; so gehören diese Punkte d zu der Parabel.

In der Ellipse ist.

$$n = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{aa - bb}}{a} \text{ und}$$

$$m = \frac{a}{2} + \frac{x\sqrt{aa - bb}}{a}, \text{ also}$$

$$m + n = a.$$

Fig. 22. Beschreibt man also mit einem beliebigen Halbmesser $13 < a$ aus jedem Brennpunkte 4 und 5 beederseits der grossen Achse zween Bögen, und schneidet diese vier Bögen eben aus diesen Brennpunkten mit dem Halbmesser o 3 in den Punkten d; so gehören diese Punkte zu der Ellipse.

In der Hyperbel ist.

$$n = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a} - \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$m = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a} + \frac{a}{2}, \text{ also}$$

$$m - n = a.$$

Fig. 23. Beschreibt man also mit einem beliebigen Halbmesser $o\,3 > a$ aus jedem Brennpunkte 4 und 5 beederseits der ersten Achse zween Bögen, und schneidet diese 4 Bögen

eben

eben aus denselben Brennpunkten mit dem Halbmesser 31 in den Punkten d; so gehören diese zu der Hyperbel.

Eben hieraus fließen die Methoden die 3 leztern Krummen in einem Zuge zu zeichnen.

Denn macht man 1tens den Winkel 5 6 7 = 90° und o 1 = o 2 = $\frac{p}{4}$, zieht 18 senkrecht auf OT, befestiget einen Faden, 2 4 5 = 5 6 in 2 und 5 und drücket mit einem Bleystifte 4 diesen Faden beständig an den Winkelhacken 5 6 7, mittlerweil als dieser längst des Lineals 18 fortgeschoben wird; so beschreibt der Bleystift die halbe Parabel o 9. Weil in jedem Punkte 4 der Fahrstrahl 24 = 46 = 31 = $x + \frac{p}{4}$ ist. Fig. 24.

Befestiget man 2tens einen Faden 5 6 4, welcher, der Achse 1 2 einer Ellipse gleich ist, in den Brennpunkten 4 und 5, und spannet ihn mit einem Bleystifte 6 an; so beschreibt dieser Bleystift, indem man von 1 bis 2 fährt, die halbe Ellipse 1 6 2. Weil in jedem Punkte 6 die Summe der Fahrstrahle 56 + 64 allzeit der Achse 1 2 gleich wird. Fig. 25.

Macht man 3tens ein Linial 13 in einem Brennpunkte 1 einer Hyperbel, und einen Faden 2 4 3, welcher um die Achse o 5 kleiner als das Lineal 13 ist, in dem andern Brennpunkte 2 und am Ende 3 des Lineals fest, und hält den Faden mit einem Bleystifte 4 beständig an das Lineal; so beschreibt dieser, indem sich das Lineal um den Punkt 1 drehet, die Viertelhyperbel o 6. Weil in jedem Punkte 4 der Unterscheid der Fahrstrahle 41 — 42 beständig der Achse o 5 gleich bleibt. Fig. 26.

15. Das einer Ordinate 34 **zugehörige Rechteck** ist in der Parabel das Produkt aus der Abscisse in den Parameter, in den drey übrigen Krummen aber wird ein Faktor 03 dieses Rechteckes zwischen der Ordinate und einem Ende der Achse, und der andere Faktor 13 zwischen der Or- Fig. 27. 28. 29. 30.

Ordinate und dem andern Ende der Achse auf der Abscissenlinie genommen.

Rechnet man also die Abscissen vom Ursprunge o an; so ist dieses Rechteck Fig. 27. 28. 29. 30. in der Parabel = px, in dem Kreise und in der Elipse = ax — xx und in der Hyperbel = ax + xx. Werden aber die Abscissen vom Mittelpunkte 2 an gezählet; so wird dieses Rechteck Fig. 31. 32. 33. in dem Kreise und in der Elipse $= \frac{aa}{4} - xx$ und in der Hyperbel $= xx - \frac{aa}{4}$.

Fig. 31. 32. 33.

16. Man suche das Verhältniß des Quadrats der Ordinate zu ihrem zugehörigen Rechtecke.

Für die Parabel ist

$$yy = px$$

Für den Kreis ist

$$yy = ax - xx. \text{ Oder}$$

$$yy = \frac{aa}{4} - xx$$

Für die Elipse ist

$$yy = px - \frac{pxx}{a}$$

$$ayy = apx - pxx, \text{ also}$$

$$yy : ax - xx = p : a. \text{ Oder}$$

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}$$

$$aayy = \frac{aabb}{4} - bbxx, \text{ also}$$

$$yy : \frac{aa}{4} - xx = bb : aa$$

Für

Für die Hyperbel ist

$$yy = px + \frac{pxx}{a}$$

$ayy = apx + pxx$, also

$yy : ax + xx = p : a$. Oder

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

$$aayy = bbxx - \frac{aabb}{4}, \text{ also}$$

$$yy : xx - \frac{aa}{4} = bb : aa.$$

Daher ist das Quadrat der Ordinate in der Parabel und in dem Kreise allzeit dem zugehörigen Rechtecke gleich: in der Elipse und Hyperbel aber verhält sich das Quadrat der Ordinate zu ihrem zugehörigen Rechtecke wie der Parameter der ersten Achse zu der ersten Achse, oder wie das Quadrat der zwoten Achse zu dem Quadrate der ersten.

17. **Man suche das Verhältniß der Quadrate zwoer Ordinaten.** Fig. 34.

Für die Parabel ist

$yy = px$ und

$zz = pu$, also

$yy : zz = px : pu$

$yy : zz = x : u$

Für den Kreis ist

$yy = ax - xx$ und

$zz = au - uu$, also

$yy : zz = ax - xx : au - uu$

Für die Elipse ist

$$yy = px - \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

$$zz = pu - \frac{puu}{a}, \text{ also}$$

$$yy : zz = px - \frac{pxx}{a} : pu - \frac{puu}{a}$$

$$yy : zz = ax - xx : au - uu$$

Für die Hyperbel ist

$$yy = px + \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

$$zz = pu + \frac{puu}{a}, \text{ also}$$

$$yy : zz = px + \frac{pxx}{a} : pu + \frac{puu}{a}$$

$$yy : zz = ax + xx : au + uu.$$

Daher verhalten sich die Quadrate der Ordinaten in der Parabel wie ihre Abscissen, in den drey übrigen Krummen aber wie ihre zugehörigen Rechtecke.

18. **Man verwandle diese Gleichungen für die Ordinaten zur ersten Achse in jene für die Ordinaten zur zwoten Achse.**

Fig. 35. Zieht man von einem und demselben Punkte 4 der
36. Krummen die Ordinaten 43 und 45 zu beeden Achsen; so
37. wird y die Abscisse und x die Ordinate zur zwoten Achse. Sucht man also aus jeder Gleichung den Werth von xx; so kommen die Gleichungen für die Ordinaten zur zwoten Achse zum Vorscheine.

Für den Kreis ist

$$yy = \frac{aa}{4} - xx, \text{ also}$$

$$xx = \frac{aa}{4} - yy$$

Für die Ellipse ist

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}$$

$$aayy = \frac{aabb}{4} - bbxx \text{, also}$$

$$xx = \frac{aa}{4} - \frac{aayy}{bb}.$$

Für die Hyperbel ist

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

$$aayy = bbxx - \frac{aabb}{4} \text{, also}$$

$$xx = \frac{aayy}{bb} + \frac{aa}{4}.$$

Und nennt man die Abscisse auf der zwoten Achse wider x, ihre Ordinate y, die zwote Achse a und die erste b; so sind die Gleichungen für die Ordinaten zur zwoten Achse des Kreises und der Ellipse

$$yy = \frac{aa}{4} - xx \text{ und}$$

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}$$

einerley mit den Gleichungen für die Ordinaten zur ersten Achse. Hingegen ist die Gleichung zur zwoten Achse der Hyperbel $yy = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4}$ von der Gleichung zur ersten Achse

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

darinn unterschieden, daß jene $+ \frac{bb}{4}$ und diese $- \frac{bb}{4}$ enthält.

19. Man setze die bejahenden Abscissen der Hyperbel werden auf oS von o gegen S genommen, und wiederhole alle vorigen Untersuchungen nach dieser Gleichung Fig. 38.

yy

$$yy = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4}.$$

Setzet man $y = 0$; so wird $x = \pm \sqrt{-\frac{aa}{4}}$ unmöglich; also hat diese Krumme mit oS keinen Punkt gemein: setzet man aber $x = 0$; so wird $y = \pm \frac{b}{2}$, folglich geht diese Krumme durch die beyden Ende der Achse 1 2 oder b. Weil der Werth von yy aus zween bejahenden Theilen, welche nie verneinend werden können, besteht; so bleibt yy allzeit ein bejahendes Quadrat, also y eine mögliche Größe. Und weil diese Gleichung eine reine quadratische ist; so hat y für jedes x zween gleiche und entgegengesetzte Werthe.

Setzet man zwo gleiche Ordinaten y und z und bestimmt die eine Absciße x durch die andere u; so wird $x = \pm u$: also sind die Ordinaten, welche gleichweit vom Mittelpunkte abstehen einander gleich. Uebrigens wird y größer oder kleiner, nachdem x wächst oder abnimmt: folglich besteht diese Krumme aus vier vollkommen gleichen Theilen, welche in den Punkten 1 und 2 entspringen, sich immer von der Graden SV entfernen und bis ins Unendliche fortlaufen.

Weil $$yy = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4} \text{ oder}$$

$$yy = \left(\frac{\frac{xx}{a} \times b}{a} + \frac{b}{4}\right)b; \text{ so verhält sich}$$

$$b : y = y : \frac{\frac{xx}{a} + b}{a} + \frac{b}{4}.$$

Sucht man also 1tens zu a und x die dritte Proportionirte $\frac{xx}{a}$, 2tens zu a, b und $\frac{xx}{a}$ die vierte Proportionirte

$\frac{bxx}{aa}$

$\frac{bxx}{aa}$ und 3tens zwischen b und $\frac{bxx}{aa} + \frac{b}{4}$ die mittlere Proportionirte y; so giebt diese gehörig aufgetragen allemal vier Punkte, welche zur Krummen gehören.

Da $b : a = a : \frac{aa}{b}$; so ist $\frac{aa}{2b}$ der halbe Parameter der Achse 1 2 oder b; und setzet man $\frac{aa}{2b}$ anstatt x in die Gleichung; so findet man die Entfernung der Brennpunkte von dem Mittelpunkte $y = \pm\sqrt{\frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}}$ wie oben.

Wird in die Gleichung $yy = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4}$, ap anstatt bb gesetzt; so wird für die Gleichung zum Parameter der zwoten Achse: $yy = \frac{pxx}{a} + \frac{ap}{4}$.

Weil $yy = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4}$ oder

$yy = \frac{pxx}{a} + \frac{ap}{4}$; so ist auch

$aayy = bbxx + \frac{aabb}{4}$ oder

$ayy = pxx + \frac{aap}{4}$, also

$yy : xx + \frac{aa}{4} = bb : aa$ oder

$yy : xx + \frac{aa}{4} = p : a$

Daher verhält sich das Quadrat der Ordinate auf die zwote Achse zur Summe der Quadrate der Abscisse und der halben zwoten Achse, wie das Quadrat der ersten

sten zu dem Quadrate der zwoten Achse, oder wie der Parameter der zwoten zu der zwoten Achse.

Endlich ist $yy = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4}$ und

$$zz = \frac{bbuu}{aa} + \frac{bb}{4}, \text{ folglich}$$

$$yy : zz = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4} : \frac{bbuu}{aa} + \frac{bb}{4}.$$

$$yy : zz = xx + \frac{aa}{4} : uu + \frac{aa}{4}.$$

Folglich verhalten sich die Quadrate der Ordinaten auf die zwote Achse wie die Summen der Quadrate der zugehörigen Abscisse und der zwoten Achse.

Die Gleichung zu der ersten und zwoten Achse der Hyperbel, so wie diese Verhältnisse können allgemein, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$yy = \frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}$$

$$yy : xx \mp \frac{aa}{4} = bb : aa$$

$$yy : xx \mp \frac{aa}{4} = p : a$$

$$yy : zz = xx \mp \frac{aa}{4} : uu \mp \frac{aa}{4}.$$

Da — für die erste und + für die zwote Achse gilt.

20. Die **Tangente** ist eine gerade Linie, welche ohne die Krumme zu schneiden, nur einen Punkt mit derselben gemein hat.

Weil in beyden Enden der ersten Achse $y=0$ wird; so sind die durch diese Punkte auf die erste Achse gezogenen Senkrechten Tangenten zu diesen Krummen. Eben dieses gilt auch in Ansehung der zwoten Achse des Kreises und der Ellipse, nicht aber der Hyperbel.

Jede

Jede Tangente 12, ausser welche durch ein End der zwoten Achse des Kreises oder der Elipse geht, muß die Abscissenlinie schneiden. Denn sonst würde sie mit der Abscissenlinie gleichlaufen und nach Nro. 7. die Krumme schneiden. Fig. 39. 40. 41. 42. 43.

Eine durch den Berührungspunkt 2 auf die Tangente 12 gezogene Senkrechte 24 heißt **Normal**, und jenes Stück S = 31 oder T = 34, welches die Ordinate und Tangente oder die Ordinate und Normal auf der Abscissenlinie abschneiden, wird **Subtangente** oder **Subnormal** genennt.

21. Man suche für die Subtangente einen Ausdruck, welcher die Ordinate nicht enthält.

Führt man durch den Berührungspunkt eine Ordinate 23; so kann daß rechtwinklichte Dreyeck 123 wegen der noch unbekannten Hypothenuse zur Auflösung nicht hinreichen. Daher muß man den verlangten Ausdruck vorläufig für allgemeinere Linien, worunter die Tangente mit einem bekannten Bedingnisse begriffen ist, suchen, und sodann denselben nach eben diesem Bedingnisse bestimmen. Die allgemeineren Linien sind die Sekanten, welche allemal unter dem Bedingnisse, daß ihre Durchschnitte nur einen und denselben Punkt ausmachen, zu Tangenten werden.

Ist diesemnach 13 = s, und die Entfernung der Ordinaten 38 = d; so geben die ähnlichen Dreyecke 231 und 681 einen Ausdruck für das Verhältniß der Quadrate der Ordinaten; aus der Natur jeder Krummen folgt ein zweyter Ausdruck für dasselbe Verhältniß. Daraus entsteht eine Proportion, welche keine Ordinate mehr enthält, also s für jede Sekante durch x und d bestimmt. Endlich kommt der verlangte Ausdruck für die Subtangente s zum Vorscheine, wenn man wegen des Bedingnisses, daß beyde Durchschnitte der Sekante nur einen und denselben Punkt ausmachen, noch d = 0 setzet. Fig. 44.

Diesem zu Folge verhält sich in jeder Krummen wegen der ähnlichen Dreyecke 231 und 681.

$yy : zz = ss : ss + 2sd + dd$ und

1tens in der Parabel

$yy : zz = x : x + d$, also ist

$x : x + d = ss : ss + 2sd + dd$

$d : x = 2sd + dd : ss$

$1 : x = 2s + d : ss$ für jede Sekante, und wenn $d = 0$ ist,

Fig. 39. $1 : x = 2s : ss$; folglich ist

$s = 2x$ für jede Tangente:

2tens im Kreise und in der Elipse

$yy : zz = ax - xx : a(x + d) - (x+d)^2$, oder

$yy : zz = ax - xx : ax+ad-xx-2xd-dd$, also

$ax-xx : ax+ad-xx-2xd-dd = ss : ss + 2sd+dd$

$ad - 2xd - dd : ax - xx = 2sd + dd : ss$

$a - 2x - d : ax - xx = 2s + d : ss$

für jede Sekante, und wenn $d = 0$ ist,

Fig. 40. $a - 2x : ax - xx = 2s : ss$

41. $\frac{a}{2} - x : ax - xx = 1 : s$; folglich ist

$s = \frac{ax - xx}{\frac{a}{2} - x}$ für jede Tangente:

3tens in der Hyperbel

$yy : zz = ax + xx : a(x+d) + (x+d)^2$ oder,

$yy : zz = ax + xx : ax + ad + xx + 2xd + dd$, also

$ax + xx : ax + ad + xx + 2xd + dd = ss : ss + 2sd + dd$

$ad + 2xd + dd : ax + xx = 2sd + dd : ss$

$a + 2x + d : ax + xx = 2s + d : ss$

für jede Sekante, und wenn $d = 0$ ist,

Fig. 42. $a + 2x : ax + xx = 2s : ss$

$\frac{a}{2} + x : ax + xx = 1 : s$, folglich ist

$$s = \frac{ax + xx}{\frac{a}{2} + x} \text{ für jede Tangente.}$$

Die Subtangente ist also in der Parabel der doppelten Abscisse, in den drey übrigen Krummen aber dem zugehörigen Rechtecke dividirt durch die Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkte gleich. Oder die Subtangente ist in den drey letztern Krummen die vierte Proportionirte zu eben dieser Entfernung und den zween Faktoren des zugehörigen Rechteckes.

22. Aus den Gleichungen, welche die Abscissen vom Mittelpunkte an rechnen, folgt eben dasselbe. Denn wegen der ähnlichen Dreyecke 2 3 1 und 6 8 1 ist, wie zuvor, für jede Krumme Fig. 44.

$yy : zz = ss : ss + 2sd + dd$ und

1tens in dem Kreise und in der Elipse

$$yy : zz = \frac{aa}{4} - xx : \frac{aa}{4} - (x - d)^2, \text{ oder}$$

$$yy : zz = \frac{aa}{4} - xx : \frac{aa}{4} - xx + 2dx - dd, \text{ also}$$

$$\frac{aa}{4} - xx : \frac{aa}{4} - xx + 2dx - dd = ss : ss + 2sd + dd$$

$$2dx - dd : \frac{aa}{4} - xx = 2sd + dd : ss$$

$$2x - d : \frac{aa}{4} - xx = 2s + d : ss$$

für jede Sekante, und wenn $d = 0$ ist, Fig. 40. 41.

$$2x : \frac{aa}{4} - xx = 2s : ss$$

$$x : \frac{aa}{4} - xx = 1 : s\text{; folglich ist}$$

$$s = \frac{\frac{aa}{4} - xx}{x} \text{ für jede Tangente:}$$

2tens in der Hyperbel in Ansehung der ersten Achse

$$yy : zz = xx - \frac{aa}{4} : (x+d)^2 - \frac{aa}{4}, \text{ oder}$$

$$yy : zz = xx - \frac{aa}{4} : xx + 2xd + dd - \frac{aa}{4}, \text{ also}$$

$$xx - \frac{aa}{4} : xx - \frac{aa}{4} + 2xd + dd = ss : ss + 2sd + dd$$

$$2xd + dd : xx - \frac{aa}{4} = 2sd + dd : ss$$

$$2x + d : xx - \frac{aa}{4} = 2s + d : ss$$

für jede Sekante, und wenn $d = 0$ ist,

Fig. 42. $$2x : xx - \frac{aa}{4} = 2s : ss$$

$$x : xx - \frac{aa}{4} = 1 : s\text{; folglich ist}$$

$$s = \frac{xx - \frac{aa}{4}}{x} \text{ für jede Tangente:}$$

3tens in der Hyperbel in Ansehung der zwoten Achse

$$yy : zz = xx + \frac{aa}{4} : (x+d)^2 + \frac{aa}{4} \text{ oder}$$

$$yy : zz = xx + \frac{aa}{4} : xx + 2xd + dd + \frac{aa}{4}, \text{ also}$$

$$xx + \frac{aa}{4} : xx + 2xd + dd + \frac{aa}{4} = ss : ss + 2sd + dd$$

$$2xd + dd : xx + \frac{aa}{4} = 2sd + dd : ss$$

$$2x + d : xx + \frac{aa}{4} = 2s + d : ss$$

für jede Sekante, und wenn $d = 0$ ist,

$$2x : xx + \frac{aa}{4} = 2s : ss$$ Fig. 43.

$x : xx + \frac{aa}{4} = 1 : s$; folglich ist

$s = \frac{xx + \frac{aa}{4}}{x}$ für jede Tangente.

Da $xx - \frac{aa}{4}$ kleiner, und $xx + \frac{aa}{4}$ größer als xx Fig. 42.
ist; so wird auch die Subtangente auf der ersten Achse 43.
$s = \frac{xx - \frac{aa}{4}}{x}$ kleiner, und die Subtangente auf der zwoten Achse $s = \frac{xx + \frac{aa}{4}}{x}$ größer als x die Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkte. Oder die Ordinate und Tangente schneiden die erste Achse der Hyperbel auf derselben Seite, die zwote aber auf den entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes.

23. Man suche die Entfernung $m = 18$ des Durchschnittes der Tangente von dem Mittelpunkte.

In dem Kreise und in der Elipse ist $m = s + x$, in Fig. 40.
der Hyperbel auf der ersten Achse $m = x - s$ und auf 41.
der zwoten Achse $m = s - x$. Nun setzet man anstatt 42.
s seinen Werth; so wird in jeder Krummen 43.

$$m = \frac{aa}{4x}, \text{ oder}$$

$$x : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : m$$

Daher ist die Entfernung des Durchschnittes der Tangente von dem Mittelpunkte auf jeder Achse die dritte Proportionirte, zu der Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkte und zu derselben halben Achse.

24. Man suche die Entfernung n=10 des Durchschnittes der Tangente von der Krummen Scheitel.

Fig. 39. 40. 41. 42. In der Parabel ist $n = s - x$, in dem Kreise und in der Elipse $n = m - \frac{a}{2}$ und in der Hyperbel $n = \frac{a}{2} - m$. Nun setzet man anstatt s und m ihre Werthe; so wird in der Parabel

$$n = x$$

in dem Kreise und in der Elipse

$$x : \frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} : n$$

und in der Hyperbel

$$x : x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : n$$

Daher wird die Abscissenlinie der Parabel durch die Ordinate und die Tangente allzeit in gleicher Entfernung von dem Scheitel geschnitten. In den drey übrigen Krummen aber verhält sich der Abstand der Ordinate vom Mittelpunkte zu jenem vom Scheitel, wie der Abstand des Scheitels vom Mittelpunkte zu jenem vom Durchschnitte der Tangente.

25. Es sey der Werth für die Subnormal T zu suchen.

Wegen

Wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 1 2 4 ist in Fig. 39.
jeder Krummen $yy = Ts$. Nun setzet man anstatt yy 40. 41.
und s ihre Werthe; so wird 42. 43.

In der Parabel

$$T = \frac{p}{2}$$

In dem Kreise aus No. 22.

$$T = x$$

In der Elipse und Hyperbel für beyde Achsen aus No. 22.

$$T = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{a} \text{ oder}$$

$$a : p = x : T.$$

Daher ist die Subnormal in der Parabel dem halben Parameter, und in dem Kreise der Entfernung der Ordinate von Mittelpunkte gleich. In der Elipse und Hyperbel aber verhält sich die Achse, worauf die Subnormal fällt, zu ihrem Parameter, wie die Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkte zu der Subnormal.

Da in der Elipse

$$T = \frac{px}{a} = \frac{bbx}{aa} \text{ ist;}$$

so wird T grösser oder kleiner als x, nachdem p oder b grösser oder kleiner als a ist.

Die Normal und die Ordinate schneiden also die grössere Achse auf derselben Seite, die kleinere aber auf den entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes.

26. **Man ziehe aus dem Berührungspunkte 2 einer Tangente 23 zween Fahrstrahle 12 und 26, und durch einen Brennpunkt 1 mit dieser Tangente** Fig. 45.
eine Gleichlaufende 14; und suche das Verhältniß 46. 47.
des Fahrstrahles 12 zu dem Stücke 24 = r, wel- 48. 49.
ches auf dem andern Fahrstrahle 26 zwischen der 50.
Tangente und dieser Gleichlaufenden begrifen ist.

Fig. 45. Weil im Kreise die beeden Fahrstrahle nur einen und denselben ausmachen; so wird auch r ebendenselben gleich.

Fig. 46. In der Parabel ist der eine Fahrstrahl 26 mit der Abscissenlinie gleichlaufend, folglich $r = 13 = x + \frac{p}{4} = 12.$

In der Elipse und Hyperbel verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 3 2 6, und 1 4 6.

$$36 : 31 = 26 : 24;$$ also

Fig. 47. In der Elipse Fig. 47.

48. 49. 50.

$$\frac{aa}{4x} + \frac{\sqrt{aa-bb}}{2} : \frac{aa}{4x} - \frac{\sqrt{aa-bb}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a} : r$$

folglich wird

$$r\left(\frac{aa}{4x} + \frac{\sqrt{aa-bb}}{2}\right) = \frac{a^3}{8x} - \frac{x(aa-bb)}{2a}$$

beederseits mit 4x multiplicirt

$$r(aa + 2x\sqrt{aa-bb}) = \frac{a^4 - 4xx(aa-bb)}{2a}$$

durch $aa + 2x\sqrt{aa-bb}$ dividirt

$$r = \frac{aa - 2x\sqrt{aa-bb}}{2a},$$ oder

$$r = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a} = 12.$$

Oder Fig. 48.

$$\frac{aa}{4x} - \frac{\sqrt{aa-bb}}{2} : \frac{aa}{4x} + \frac{\sqrt{aa-bb}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a} : r$$

Folglich wird

$$r\left(\frac{aa}{4x} - \frac{\sqrt{aa-bb}}{2}\right) = \frac{a^3}{8x} - \frac{x(aa-bb)}{2a}$$

beeder-

beederseits mit 4x multiplicirt

$$r(aa - 2x\sqrt{aa - bb}) = \frac{a^4 - 4xx(aa - bb)}{2a}$$

durch $aa - 2x\sqrt{aa - bb}$ dividirt

$$r = \frac{aa + 2x\sqrt{aa - bb}}{2a}, \text{ oder}$$

$$r = \frac{a}{2} + \frac{x\sqrt{aa - bb}}{a} = 12.$$

In der Hyperbel ist Fig. 49.

$$\frac{\sqrt{aa + bb}}{2} + \frac{aa}{4x} : \frac{\sqrt{aa + bb}}{2} - \frac{aa}{4x} = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a} + \frac{a}{2} : r.$$

Folglich wird

$$r\left(\frac{\sqrt{aa + bb}}{2} + \frac{aa}{4x}\right) = \frac{x(aa + bb)}{2a} - \frac{a^3}{8x}$$

mit 4x multiplicirt

$$r(2x\sqrt{aa + bb} + aa) = \frac{4xx(aa + bb) - a^4}{2a}$$

durch $2x\sqrt{aa + bb} + aa$ dividirt

$$r = \frac{2x\sqrt{aa + bb} - aa}{2a}, \text{ oder}$$

$$r = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a} - \frac{a}{2} = 12.$$

Oder Fig. 50.

$$\frac{\sqrt{aa + bb}}{2} - \frac{aa}{4x} : \frac{\sqrt{aa + bb}}{2} + \frac{aa}{4x} = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a} - \frac{a}{2} : r$$

Folglich wird

$$r\left(\frac{\sqrt{aa + bb}}{2} - \frac{aa}{4x}\right) = \frac{x(aa + bb)}{2a} - \frac{a^3}{8x}$$

 mit

mit 4x multiplicirt

$$r(2x\sqrt{aa+bb}-aa)=\frac{4xx(aa+bb)-a^4}{2a}$$

durch $2x\sqrt{aa+bb}-aa$ dividirt

$$r=\frac{2x\sqrt{aa+bb}+aa}{2a}, \text{ oder}$$

$$r=\frac{x\sqrt{aa+bb}}{a}+\frac{a}{2}=1\ 2.$$

da nun 2 4 allemal 1 2 gleich, also das Dreyeck 1 2 4 gleichschenklicht ist; so macht die Tangente 3 2 mit den beeden Fahrstrahlen in jedem Punkte 2 der Krummen zween gleiche Winkel.

Daher werden alle Thon- Licht- und Feuerstrahlen, welche aus dem Brennpunkte eines durch die Umdrehung einer Parabel, Elipse, oder Hyperbel erzeugten Hohlspiegels auf eben diesen fallen, dergestalt zurückgeworfen, daß sie in dem parabolischen gleichlaufend mit der Achse ausfahren, in dem eliptischen sich in dem andern Brennpunkte sammeln und in dem Hyperbolischen sich so zerstreuen, daß ihre Verlängerungen sich in dem andern Brennpunkte schneiden. Hierinn gründet sich die Lehre von den Brennspiegeln und allen jenen Instrumenten, welche dem Auge, dem Gehöre und der Stimme des Menschen so große Vortheile verschaffen.

27. **Es sey durch einen gegebenen Punkt 2 der Krummen eine Tangente zu führen.**

Fig. 39. 40. 41. 42. Man ziehe die Ordinate 2 3, und mache 1tens nach Nro. 21. oder 22. in der Parabel 31 das doppelte von 30, in den Uebrigen Krummen aber

$$38 : 30 = 35 : 31, \text{ und ziehe } 12.$$

Fällt

Fällt die Ordinate auf die zwotte Achse der Hyperbel Fig. 43.; so nimmt man $86 = \frac{a}{2} = 80$ und zieht 61 senkrecht auf 63. Denn so wird

$$31 = \frac{xx + \frac{aa}{4}}{x} = \frac{36 \times 36}{38} \text{ oder}$$

$$38 : 36 = 36 : 31.$$

Oder man nehme 2tens nach Nro. 23. Fig. 40. 41. 42. 43.

$$83 : 80 = 80 : 81 \text{ und ziehe } 12.$$

Oder man mache 3tens nach Nro. 24. in der Parabel Fig. 39. 40. 41. 42.
$91 = 03$ und in den übrigen Krummen

$$38 : 30 = 08 : 01 \text{ und ziehe } 12.$$

Oder man nehme 4tens nach Nro. 25. in der Parabel Fig. 39. 40. 41. 42. 43.
$34 = \frac{p}{2}$, in den übrigen Krummen aber

$$a : p = 38 : 34$$

und ziehe 12 senkrecht auf 24.

Oder man ziehe 5tens nach Nro. 26. die beeden Fahrstrahle 21 und 26, nehme $24 = 21$ und führe 23 gleichlaufend mit 14, oder mache lieber $27 = 12$ und halbire 17 durch 23. Fig. 46. 47. 48. 49. 50.

28. Eine Tangente, welche die Krumme erst im Unendlichen berührt, wird derselben Assymptote genennt.

Da der Berührungspunkt dieser Tangente im Unendlichen liegen soll, so kann weder dem Kreise noch der Elipse eine Assymptote zugehören.

In der Parabel wird die Abscissenlinie von der Tangente und der Ordinate allzeit in gleicher Entfernung von dem Scheitel, also auch von der Assymptote in einer unend-

lichen Entfernung oder nirgends mehr geschnitten; folglich ist die Assymptote mit der Abscissenlinie gleichlaufend, unendlich weit von ihr entfernt, und ebenfalls nirgends mehr. In der Hyperbel schneidet jede Tangente die Abscissenlinie in der Entfernung $\frac{aa}{4x}$ vom Mittelpunkte: für die Assymptote aber wird $x = \infty$, also diese Entfernung $\frac{aa}{4x} = 0$. Folglich geht die Assymptote durch den Mittelpunkt der Hyperbel.

Fig. 51. Es sey die Tangente 07 bis an die Assymptote 57 gezogen; man soll einen Ausdruck für $s = 07$ finden.

Weil von dem rechtwinklichten Dreyecke 507 nur eine Kathede $05 = \frac{a}{2}$ bekannt ist; so muß man s für allgemeinere Linien, für jene, welche von dem Mittelpunkte bis an einen Punkt der Krummen gezogen sind, suchen, und sodann diesen Ausdruck nach der unterscheidenden Eigenschaft der Assymptote noch dadurch bestimmen, daß man $x = \infty$ setzet.

Fig. 52. Diesem zu Folge verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 507, und 563

$$xx : yy = \frac{aa}{4} : ss, \text{ oder}$$

$$xx : \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4} = \frac{aa}{4} : ss$$

folglich ist $ss = \frac{bb}{4} - \frac{aabb}{16xx}$ für jede Gerade, welche von dem Mittelpunkte bis an einen Punkt der Hyperbel gezogen ist. Setzet man nun $x = \infty$; so wird

$$\frac{aabb}{16xx} = 0, \text{ also}$$

$$ss = \frac{bb}{4} \text{ und}$$

$$s = \pm \frac{b}{2} \text{ für die Assymptote.}$$

Nimmt man also $07 = 08 = \frac{b}{2}$, und zieht die Geraden 57 und 58; so sind diese der Hyperbel Assymptoten. Fig. 51.

29. Zieht man mit der ersten oder zwoten Achse eine Gleichlaufende 12; so wird wegen der vollkommen gleichen Dreyecke 561 und 562, 61 = 62, und wegen der gleichen Ordinaten, 63 und 64, Fig. 51.

$$31 = 42 \text{ und}$$
$$32 = 41.$$

Folglich sind jene Theile, welche auf einer solchen Gleichlaufenden beederseits auf dieselbe Art zwischen der Hyperbel und ihren Assymptoten begriffen sind, einander gleich.

30. Man suche einen Ausdruck für das Rechteck aus jenen Theilen dieser Gleichlaufenden, welche zwischen einem Durchschnitte der Assymptoten und denn zween andern der Hyperbel, oder welche zwischen einem Durchschnitte der Hyperbel und den zween andern der Assymptoten begriffen sind: das ist, für das Rechteck Fig. 51.

$$13 \times 14$$
$$24 \times 23$$
$$31 \times 32 \text{ oder}$$
$$42 \times 41.$$

Wegen der ähnlichen Dreyecke 5 0 7 und 5 6 1 verhält sich

$$50 : 07 = 56 : 61, \text{ oder}$$
$$\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = x : 61; \text{ folglich wird}$$
$$61 = \frac{bx}{a}$$

und

und 1tens auf der Gleichlaufenden mit der zwoten Achse nach der Gleichung zur ersten

$$24 = 13 = \frac{bx}{a} - y \quad \text{und}$$

$$23 = 14 = \frac{bx}{a} + y, \quad \text{also}$$

jenes Rechteck $= \frac{bbxx}{aa} - yy$ oder

$$= \frac{bbxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4},$$

und 2tens auf der Gleichlaufenden mit der ersten Achse nach der Gleichung zur zwoten

$$13 = 24 = y - \frac{bx}{a} \quad \text{und}$$

$$23 = 14 = y + \frac{bx}{a}, \quad \text{also}$$

jenes Rechteck $= yy - \frac{bbxx}{aa}$ oder

$$= \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{4}.$$

Daher ist das verlangte Rechteck dem Quadrate jener halben Achse, welche mit den Faktoren gleichläuft, gleich.

Entfernet sich die gerade 12 von dem Mittelpunkte bis ins Unendliche; so wird 56 und 63, also auch 32 unendlich groß, folglich, weil 32×31 beständig $= \frac{bb}{4}$ bleibt, 31 unendlich klein, oder $= 0$, das ist, 51 berührt die Krumme erst im Unendlichen.

Fig. 53. 54. 31. Man ziehe 14 schief, und durch ihre Durchschnitte 2 und 3 die Geraden 78 und 56 senkrecht auf die Achse; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 435 und 427

$$42 : 27 = 43 : 35.$$

und

und wegen der ähnlichen Dreyecke 182 und 163

$$12 : 28 = 13 : 36 \quad \text{folglich,}$$

$$12 \times 42 : 28 \times 27 = 43 \times 13 : 35 \times 36.$$

Es ist aber nach Vorigem

$$28 \times 27 = 35 \times 36, \quad \text{also auch}$$

$12 \times 24 = 43 \times 31$ oder 1tens Fig. 53

$$12\,(23 + 34) = 43\,(32 + 21)$$
$$12 \times 23 + 12 \times 34 = 43 \times 32 + 43 \times 21$$
$$12 \times 23 = 43 \times 32$$

$$12 = 43 \quad \text{und}$$

$$12 + 23 = 43 + 32 \quad \text{oder}$$

$13 = 42$: oder 2tens Fig. 54.

$$12\,(23 - 34) = 43\,(32 - 21)$$
$$12 \times 23 - 12 \times 34 = 43 \times 32 - 43 \times 21$$

$$12 \times 23 = 43 \times 32$$
$$12 = 43 \quad \text{und}$$
$$12 - 41 = 43 - 41 \quad \text{oder}$$
$$24 = 13.$$

Wenn also was immer für eine Gerade die Hyperbel und ihre Assymptoten schneidet; so sind jene Theile dieser Geraden, welche beederseits auf dieselbe Art zwischen der Hyperbel und ihren Assymptoten begriffen sind, einander gleich.

Nähert sich die Gerade 14 dem Mittelpunkte; so bleibt 12 beständig 34 gleich; folglich auch noch gleich, wenn Fig. 53 die Punkte 2 und 3 in o, und Fig. 54 die Punkte 1 und 4 in 9 zusammen fallen.

Daher wird jede Gerade 23 im Mittelpunkte 9 und jede Tangente 14 in dem Berührungspunkte o halbirt.

32. Man ziehe zwo Gleichlaufende 31 und 64 schief, und durch 5 und 2 die Gleichlaufenden 79 und 8, 10 senkrecht Fig. 55. 56.

senkrecht auf die Achse; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 238 und 567, 2,1,10 und 549.

$$23 : 28 = 56 : 57 \quad \text{und}$$
$$21 : 2{,}10 = 54 : 59, \quad \text{also}$$
$$21 \times 23 : 28 \times 2{,}10 = 56 \times 54 : 57 \times 59$$

Es ist aber

$$28 \times 2{,}10 = 57 \times 59, \quad \text{also auch}$$
$$23 \times 21 = 56 \times 54 \quad \text{und weil nach}$$

Vorigem 23 = 1,11 und 56 = 4,12 ist; so wird ferner auch

$$12 \times 1{,}11 = 45 \times 4{,}12.$$

Daher sind allgemein jene Rechtecke, deren Faktoren auf zwo Gleichlaufenden zwischen einem Durchschnitte der Hyperbel und den zween andern der Assymptoten oder zwischen einem Durchschnitte einer Assymptote und den zween andern der Hyperbel auf dieselbe Art begreifen sind, einander gleich.

Nähert sich 45 immer gleichlaufend mit sich selbst dem Mittelpunkte; so bleibt das Rechtecke 56 × 54 sich selbst beständig gleich, folglich auch noch gleich, wenn Fig. 55 der Punkt 5 in dem Berührungspunkt o kömmt, und Fig. 56 die Punkte 4 und 6 im Mittelpunkte 9 zusammen fallen.

Folglich sind allgemein jene Rechtecke dem Quadrat der halben Gleichlaufenden, welche die Krumme berührt und zwischen den Assymptoten enthalten ist, oder welche durch den Mittelpunkt geht und zwischen beeden Aermen der Krummen begriffen ist, gleich.

Fig. 57. 33. Man ziehe durch jeden Punkt 2 mit der Assymptote 94 eine Gleichlaufende 25 und durch die Punkte 2 und 7 auf die Abscissenlinie die Senkrechten 14 und 68, so ist wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 978,

$$98 = \sqrt{\frac{aa + bb}{4}}$$

wegen

wegen der ähnlichen Dreyecke 978 und 934,

$$\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = x : 34, \text{ also}$$

$$34 = \frac{bx}{a}$$

$$24 = \frac{bx}{a} + y$$

$$21 = \frac{bx}{a} - y$$

und wegen der gleichschenklichten ähnlichen Dreyecke 896, 491 und 251,

68 : 89 = 12 : 25 und

68 : 89 = 24 : 59, oder

$$b : \sqrt{\frac{aa+bb}{4}} = \frac{bx}{a} - y : z \text{ und}$$

$$b : \sqrt{\frac{aa+bb}{4}} = \frac{bx}{a} + y : u, \text{ also}$$

$$bb : \frac{aa+bb}{4} = \frac{bbxx}{aa} - yy : uz$$

$$bb : \frac{aa+bb}{4} = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4} : uz$$

$$bb : \frac{aa+bb}{4} = \frac{bb}{4} : uz; \text{ folglich ist}$$

$$uz = \frac{aa+bb}{16}.$$

Zieht man 10,7 mit 19 und 11,7 mit 94 gleichlaufend; so wird, weil 78 = 67 ist,

$$10,9 = 10,8 \text{ und}$$
$$11,9 = 11,6, \text{ also}$$
$$10,9 = 11,9 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{aa+bb}{4}}$$

Und setzet man $\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{aa+bb}{4}} = m$;

so wird $uz = mm$, die Gleichung an den Assymptoten.

Fig. 58. 34. Es werden die bejahenden Abscissen u auf der Geraden os von o gegen s genommen, und ihre zugehörigen Ordinaten z gleichlaufend mit oT gezogen; so können die Eigenschaften der Hyperbel aus dieser Gleichung, wie folgt, hergeleitet werden.

1tens Weil das Produkt uz dem beständigen Quadrate mm immer gleich bleibt; so wird ein jeder aus diesen zween Faktoren u und z gleich, größer oder kleiner als m und unendlich klein, nachdem der andere gleich, kleiner oder größer als m und unendlich groß ist.

Macht man also $o1 = 12 = m$; so ist 2 in dem Winkel soT der einzelne Punkt der Krummen, welcher von os und oT gleichweit absteht; alle andern 4 oder 8 nähern sich einer aus diesen Geraden os oder oT bis ins Unendliche nachdem sie sich von der andern oT oder os mehr und bis ins Unendliche entfernen.

2tens Weil zween verneinende Faktoren eben so wie zween bejahende allzeit, ein verneinender und ein bejahender Faktor aber nie ein bejahendes Produkt mm geben; so gehört zu jedem verneinenden u allemal auch ein verneinendes z, nie aber zu einem bejahenden u ein verneinendes z oder zu einem verneinenden u ein bejahendes z.

Daher hat die Krumme in dem Winkel gol noch einen Arm, welcher dem Arme in dem Winkel soT vollkommen gleich ist. Hingegen kann kein Punkt derselben in dem Winkel los oder in dem Winkel goT liegen.

3tens Jeder Punkt 4 der Krummen wird durch die Abscisse 05 und die Ordinate 54 eben so wie durch die Abscisse 03 und die Ordinate 34 bestimmt. Die Krumme läßt sich also nach oT eben so wie nach os zeichnen: und sucht man zu einem beliebigen u den Werth von z nach dieser Proportion

$$u : m = m : z;$$

so geben u und z auf allen vier Schenkeln os, og, oT, und ol gehörig aufgetragen jedesmal vier Punkte, welche zur Krummen gehören.

4tens Zieht man aus den Durchschnitten 2 und 4 einer Sekante 56 die Ordinaten 21 und 43 und setzet 15 = s, und 13 = d; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 512 und 534, Fig. 59.

$$12 : 34 = 15 : 35 \text{ oder}$$
$$z : y = s : s - d$$

Es ist aber $z = \frac{mm}{u}$ und

$$y = \frac{mm}{u+d},$$

also verhält sich

$$\frac{mm}{u} : \frac{mm}{u+d} = s : s - d$$
$$u + d : u = s : s - d, \text{ folglich ist}$$
$$us = us + sd - ud - dd$$
$$o = sd - ud - dd$$
$$o = s - u - d \text{ und}$$
$$s = u + d, \text{ für jede Sekante } 56.$$

Sollen nun die Durchschnitte 2 und 4 nur einen und denselben Punkt ausmachen; so wird die Entfernung d = o, also die Subtangente s = 18 = u = 10.
und wegen der Gleichlaufenden 12 und 07, auch

$$82 = 27.$$

Daher ist die Subtangente 18 auf der Assymptote allemal der Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkte gleich, und jede Tangente 78 zwischen den Assymptoten wird in dem Berührungspunkte 2 halbirt.

Fig. 60. 5tens Nimmt man die mit 0,11 Gleichlaufende 12 = 01 = m, sodann 15 = 01, und zieht 52 bis in 4; so ist 45 eine Tangente, also 24 = 25, und wenn 23 mit 10 gleich läuft, 34 = 30 = m, folglich das Dreyeck 405 gleichschenklicht, und 45 senkrecht auf 20.

Nimmt man ferner zwo gleiche Abscissen 07 und 06; so werden auch ihre zugehörigen Ordinaten 79 und 68 gleich: und verlängert man 89 beederseits bis in 10 und 11; so wird wegen der ähnlichen Dreyecke 7,9,11 und 6,8,10 auch

9,11 = 8,10 und
7,11 = 6,10, also auch
4,11 = 5,10, folglich ist

11,10 gleichlaufend mit 45 und senkrecht auf 20, also ferner

12,11 = 12,10, und
12,9 = 12,8.

Wegen der ähnlichen Dreyecke 024 und 0,12,11 verhält sich

02 : 24 = 0,12 : 12,11 oder

$\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = x : 12,11$, folglich ist

$$12,11 = \frac{bx}{a}$$

$$9,11 = \frac{bx}{a} - y \text{ und}$$

$$9,10 = \frac{bx}{a} + y.$$

Wegen der gleichschenklichten ähnlichen Dreyecke 540, 9,11,7 und 10,11,0 verhält sich ferner

45 : 50 = 9,11 : 97 und
45 : 40 = 9,10 : 70 oder

$b : 2m = \frac{bx}{a} - y : z$ und

$$b : 2m = \frac{bx}{a} + y : u, \text{ also}$$

$$bb : 4mm = \frac{bbxx}{aa} - yy : uz$$

$$\frac{bb}{4} : mm = \frac{bbxx}{aa} - yy : uz$$

Es ist aber $uz = mm$ also auch

$$\frac{bbxx}{aa} - yy = \frac{bb}{4} \text{ oder}$$

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

die Gleichung zu den Achsen.

35. Man ziehe aus einem beliebigen Punkte der Krummen durch ihren Mittelpunkt eine gerade Linie bis sie die Krumme in einem andern Punkte begegnet; so heißt diese Gerade der Krummen **erster Durchmesser.**

Der Mittelpunkt der Parabel ist unendlich weit vom Scheitel entfernt; also muß jeder erster Durchmesser mit der Achse gleichlaufen und mit dem grössern Fahrstrahle nur eine und dieselbe Gerade ausmachen.

Man führe durch ein End des ersten Durchmessers eine Tangente, mit dieser eine Gleichlaufende durch den Mittelpunkt; so heißt diese Gleichlaufende der Krummen **zweyter Durchmesser.** Beede der erste und der zweyte werden gemeinschäftlich **verwandte Durchmesser** genennt.

In dem Kreise und in der Elipse wird die größe des zweyten Durchmessers durch die Krumme selbst bestimmt; in der Hyperbel aber ist der zweyte Durchmesser allzeit der mit ihm gleichlaufenden Tangente zwischen den Assymptoten gleich.

Der zweyte Durchmesser kann im Kreise und in der Elipse allzeit, und in der Hyperbel nie ein erster werden; die Parabel aber hat wegen der unendlichen Entfernung

des Mittelpunktes von dem Scheitel keinen zweyten Durchmesser.

Der Parameter des Durchmessers ist in der Parabel das Vierfache des Fahrstrahles, in den übrigen Krummen aber die dritte Proportionirte zu seinem, und dem verwandten Durchmesser.

Fig. 61. 36. Man ziehe durch die Ende zweener Verwandten Durchmesser der Elipse die Ordinaten 34 und 25, und suche das Verhältniß der Quadrate ihrer zugehörigen Abscissen 14 und 15.

Wegen der ähnlichen Dreyecke 256 und 341 verhält sich

$$65^2 : 14^2 = 25^2 : 34^2 \text{ oder}$$

$$\frac{\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^2}{xx} : uu = yy : zz \text{ und}$$

$$yy : zz = \frac{aa}{4} - xx : \frac{aa}{4} - uu, \text{ also}$$

$$\frac{\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^2}{xx} : uu = \frac{aa}{4} - xx : \frac{aa}{4} - uu$$

$$\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^2 : uu = \left(\frac{aa}{4} - xx\right)xx : \frac{aa}{4} - uu$$

$$\frac{aa}{4} - xx : uu = xx : \frac{aa}{4} - uu, \text{ also ist}$$

$$xxuu = \frac{a^4}{16} - \frac{aaxx}{4} - \frac{aauu}{4} + xxuu$$

$$o = \frac{aa}{4} - xx - uu$$

xx =

$$xx = \frac{aa}{4} - uu \text{ und}$$

$$uu = \frac{aa}{4} - xx.$$

Daher ist das Quadrat jeder Abscisse dem zur andern Ordinate gehörigen Rechtecke gleich.

Setzet man $x = u$; so wird auch $y = z$ und $d = c$, also für gleiche verwandte Durchmesser d und c

$$xx = \frac{aa}{4} - xx$$

$$2xx = \frac{aa}{4}$$

$$xx = \frac{aa}{8}; \text{ folglich verhält sich}$$

$$\frac{a}{4} : x = x : \frac{a}{2}.$$

Man nehme $15 = \frac{a}{2}$ und $16 = \frac{a}{4}$, beschreibe auf 56 einen Halbkreis; so bestimmt dieser die Abscisse 17 für die gleichen verwandten Durchmesser. Fig. 62.

37. Führt man durch den Anfang 2 eines Durchmessers eine Tangente 12, und durch jeden Punkt 4 desselben eine mit dieser Tangente gleichlaufende 43; so wird 24 oder 04 die **Abscisse** und 43 **ihre zugehörige Ordinate zum Durchmesser** genennt. Fig. 63. 64. 65. 66. 67. 68.

Man soll die Gleichungen zu den Achsen in die Gleichungen zu den Durchmessern verwandeln. Das ist, Gleichungen finden, welche dieselben Krummen durch die Durchmesser, ihre Abscissen und Ordinaten ausdrücken.

Fig. 63. 64. 65. Für die Parabel drücket man die Ordinate 37 und ihre zugehörige Absciſſe 07 durch x, y, u und z aus, ſetzet das Verhältniß der Quadrate der Ordinaten an, und vollendet die Rechnung.

Dieſemnach verhält ſich 1tens wegen der ähnlichen Dreyecke 152 und 348

12 : 15 = 34 : 84 = 76 und

15 : 25 = 48 : 38 oder

$$\sqrt{4xx + yy} : 2x = z : 84 = 76 = \frac{2xz}{\sqrt{4xx + yy}}$$

und $2x : y = \frac{2xz}{\sqrt{4xx + yy}} : 38 = \frac{yz}{\sqrt{4xx + yy}}$

2tens nach der Natur der Parabel

$$25^2 : 37^2 = 05 : 07 \text{ oder}$$

Fig. 63. $yy : \left(\frac{yz}{\sqrt{4xx + yy}} + y\right)^2 = x : x + u + \frac{2xz}{\sqrt{4xx + yy}}$

Fig. 64. $yy : \left(y - \frac{yz}{\sqrt{4xx + yy}}\right)^2 = x : x + u - \frac{2xz}{\sqrt{4xx + yy}}$

Fig. 65. $yy : \left(\frac{yz}{\sqrt{4xx + yy}} - y\right)^2 = x : x + u - \frac{2xz}{\sqrt{4xx + yy}}$

Erhebt man nun das zweyte Glied wirklich zum Quadrate, kürzet die Proportion durch yy ab, und ſetzet das Produkt der äuſſern Glieder dem Produkte der mittlern gleich; ſo erhält man für alle drey Fälle

$$\frac{xzz}{4xx + yy} = u$$

$xzz = 4uxx + uyy$, und

anſtatt yy ſein Werth px geſetzt,

$zz = 4xu + pu$

End-

Endlich weil der Parameter q des Durchmessers das Vierfache des Fahrstrahles $x + \frac{p}{4}$, also $q = 4x + p$ ist; so wird die Gleichung zu jedem Durchmesser der Parabel diese: $zz = qu$.

Für die Elipse drücket man abermal die Ordinate 37 und ihre zugehörige Abscisse 07 durch a, x, y, z, u, c und d aus, setzet das Verhältniß der Quadrate der Ordinaten an und vollendt die Rechnung. Fig. 66. 67.

Diesem zu Folge verhält sich 1tens wegen der ähnlichen Dreyecke 0,10,9 und 483

09 : 0,10 = 34 : 48 = 67 oder aus Nr. 36.

$$\frac{d}{2} : \sqrt{\frac{aa}{4} - xx} = z : 48 = 67 = \frac{2z}{d}\sqrt{\frac{aa}{4} - xx}$$

2tens wegen der ähnlichen Dreyecke 152 und 483

15 : 52 = 48 : 38 oder

$$\frac{\frac{aa}{4} - xx}{x} : y = \frac{2z}{d}\sqrt{\frac{aa}{4} - xx} : 38 = \frac{2xyz}{d\sqrt{\frac{aa}{4} - xx}}$$

3tens wegen der ähnlichen Dreyecke 0 2 5 und 0 4 6

02 : 25 = 04 : 46 und

02 : 05 = 04 : 06 oder

$$\frac{c}{2} : y = u : 46 = \frac{2uy}{c} \quad \text{und}$$

$$\frac{c}{2} : x = u : 06 = \frac{2xu}{c}$$

4tens endlich aus der Natur der Elipse

$25^2 : 37^2 = 0{,}11^2 - 05^2 : 0{,}11^2 - 07^2$ oder

Fig. 66. $yy : \left(\frac{2uy}{c} - \frac{2xyz}{d\sqrt{\frac{aa}{4} - xx}}\right)^2 = \frac{aa}{4} - xx :$

$$\frac{aa}{4} - \left(\frac{2z}{d}\sqrt{\frac{aa}{4} - xx} + \frac{2xu}{c}\right)^2$$

Fig. 67. $yy : \left(\frac{2uy}{c} + \frac{2xyz}{d\sqrt{\frac{aa}{4} - xx}}\right)^2 - \frac{aa}{4} - xx :$

$$\frac{aa}{4} - \left(\frac{2z}{d}\sqrt{\frac{aa}{4} - xx} - \frac{2xu}{c}\right)^2$$

Erhebt man nun das zweyte Glied und den zusammengesetzten Ausdruck des vierten Gliedes zum Quadrate, kürzet die Proportion ab, und setzet das Produkt der äussern Glieder dem Produkte der mittlern gleich; so erhält man für beede Fälle

$$zz = \frac{dd}{4} - \frac{dduu}{cc}.$$

Fig. 68. In der Hyperbel verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 012 und 054.

$$02 : 12 = 04 : 45 \text{ oder}$$

$$\frac{c}{2} : \frac{d}{2} = u : 54 = \frac{du}{c}.$$

Es ist aber nach der Natur dieser Krummen

$$53 \times 37 = 12 \times 12 \text{ oder}$$

$$\left(\frac{du}{c} - z\right)\left(\frac{du}{c} + z\right) = \frac{dd}{4}$$

$$\frac{dduu}{cc} - zz = \frac{dd}{4}, \text{ also}$$

zz=

$$zz = \frac{dduu}{cc} - \frac{dd}{4}.$$

38. Verwandelt man für die Elipse und Hyperbel diese Gleichungen.

$$zz = \frac{dd}{4} - \frac{dduu}{cc} \text{ und}$$

$$zz = \frac{dduu}{cc} - \frac{dd}{4}$$

in jene, welche die Abscissen vom Anfange des Durchmessers c an rechnen; so erhält man

$$zz = \frac{ddu}{c} - \frac{dduu}{cc} \text{ und}$$

$$zz = \frac{ddu}{c} + \frac{dduu}{cc}.$$

Setzet man in allen vier Gleichungen anstatt $\frac{dd}{c}$ den Parameter q des Durchmessers c; so geben die zwo ersten

$$zz = \frac{cq}{4} - \frac{quu}{c} \text{ und}$$

$$zz = \frac{quu}{c} - \frac{cq}{4}.$$

und die zwo letztern

$$zz = qu - \frac{quu}{c} \text{ und}$$

$$zz = qu + \frac{quu}{c}.$$

Verwandelt man endlich diese Gleichungen, welche die Abscissen vom Mittelpunkte an rechnen, in jene zum zweyten Durchmesser d; so kommen für die Elipse wieder dieselben, für die Hyperbel aber folgende zum Vorscheine:

zz =

$$zz = \frac{dduu}{cc} + \frac{dd}{4} \text{ oder}$$

$$zz = \frac{quu}{c} + \frac{cq}{4}.$$

Daher sind die Gleichungen zu den verwandten Durchmessern mit jenen zu den Achsen einerley: und ist ein Durchmesser a und sein Parameter p nebst der schiefen Lage seiner Ordinaten bekannt; so findet man nach ebendenselben für die Achsen schon obangestellten Untersuchungen auch in Ansehung der Durchmesser:

1tens daß die Parabel nur den Ursprung der Abscissen, die Elipse und Hyperbel aber allzeit die beyden Ende des Durchmessers a mit diesem gemein haben.

2tens daß, wenn man durch eben diese Punkte mit den Ordinaten die Gleichlaufenden zieht, die Parabel ganz auf einer Seite, die Elipse ganz zwischen und die Hyperbel beederseits ganz ausser denselben liegt.

3tens daß zu jeder Abscisse zwo gleiche und entgegengesetzte Ordinaten gehören.

4tens daß in der Parabel zu verschiedenen Abscissen keine gleichen Ordinaten möglich, in der Elipse und Hyperbel aber die vom Mittelpunkte gleichweit entfernten Ordinaten allzeit gleich sind.

5tens daß die Ordinaten zum Durchmesser wächsen, wenn sie sich in der Parabel vom Ursprunge und in der Hyperbel vom Mittelpunkte entfernen, in der Elipse aber dem Mittelpunkte nähern.

6tens daß die Ausführung dieser Gleichungen zu den Durchmessern von der Ausführung der Gleichungen zu den Achsen, durch gesuchte Punkte nur darinn unterschieden ist, daß man die gefundenen Ordinaten anstatt senkrecht auf die

Ab-

Abscissenlinie, nach ihrer gegebenen schiefen Lage auftragen muß.

7tens daß das Quadrat der Ordinate in der Parabel ihrem zugehörigen Rechtecke gleich ist, in der Elipse und Hyperbel aber sich zu diesem Rechtecke wie das Quadrat des zweyten Durchmessers zu dem Quadrate des ersten oder wie der Parameter des ersten Durchmessers zu eben diesem Verhält.

8tens daß die Quadrate der Ordinaten sich in der Parabel wie ihre zugehörigen Abscissen, in der Elipse und Hyperbel aber wie ihre zugehörigen Rechtecke verhalten.

9tens daß die Subtangente auf dem Durchmesser in der Parabel der doppelten Abscisse, in der Elipse und Hyperbel aber dem zugehörigen Rechtecke dividirt durch die Entfernung der Ordinate von dem Mittelpunkte gleich ist.

10tens daß die Entfernung des Durchschnittes der Tangente vom Mittelpunkte auf dem Durchmesser abermal dem Quadrate des halben Durchmessers dividirt durch die Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkte gleich ist.

11tens daß diese Sätze in Ansehung des zweyten Durchmessers eben so wie in Ansehung der zwoten Achse zu verstehen sind.

12tens daß die Entfernung des Durchschnittes der Tangente von dem Ursprung auf dem Durchmesser in der Parabel der Abscisse, in der Elipse und Hyperbel aber der vierten Proportionirten zu der Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkte, der Entfernung eben derselben vom Scheitel, und der Entfernung des Scheitels von dem Mittelpunkte gleich ist.

13tens daß nach diesen letztern Sätzen durch Hilfe eines Durchmessers, wenn die Lage seiner Ordinaten bekannt

kannt ist, eben so wie durch Hilfe der Achsen durch jeden Punkt der Krummen eine Tangente geführet werden kann.

Fig. 69. 70. 71. 72. 39. Da zu jeder Abscisse auf einem Durchmesser allemal zwo gleiche entgegengesetzte Ordinaten gehören; so kann auch jede Sehne als eine doppelte Ordinate zu einem Durchmesser angesehen werden. Zieht man also was immer für zwo gleichlaufende Sehnen: 78 und 23; so wird die Gerade 59, welche diese beeden Sehnen halbirt, allzeit ein Durchmesser der Krummen seyn.

In der Parabel ist dieser Durchmesser unendlich groß, in der Elipse wird jeder, in der Hyperbel aber nur der erste durch die Krumme selbst bestimmet.

Ist dieser Durchmesser ein zweyter der Hyperbel; so zieht man, um auch seine Größe zu erhalten, mit eben diesem noch zwo gleichlaufende Sehnen: welche halbirt seinen verwandten ersten Durchmesser a geben; sodann wird durch diese Gleichung

$$yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4} \text{ oder}$$

$$aayy = bbxx - \frac{aabb}{4}$$

$$aayy = bb\left(xx - \frac{aa}{4}\right)$$

$$ay = b\sqrt{xx - \frac{aa}{4}}$$

$$\sqrt{xx - \frac{aa}{4}} : y = a : b$$

auch der verlangte zweyte b gefunden

40. Soll man durch einen gegebenen Punkt zu einem gegebenen Kegelschnitte einen Durchmesser führen, und man zieht nach Vorigem einen beliebigen; so wird der verlangte in der Parabel mit diesem gleichlaufen, in den übrigen Krummen aber den beliebigen halbiren.

41. E

41. Es sey die Lage der Ordinaten eines gegebenen Durchmessers 01 zu bestimmen. Fig. 69. 70. 71. 72.

Zieht man durch jeden Punkt 1 des Durchmessers und jeden Punkt 2 der Krummen die Gerade 12, macht 10,1 = 21 und zieht 10,3 gleichlaufend mit 01; so wird 29 = 93 eine Ordinate zu dem gegebenen Durchmesser 01.

42. Es sey durch jeden Punkt 0 ausserhalb des Kegelschnittes eine Tangente zu eben diesem zu führen. Fig. 69. 70. 71. 72.

Man führe den Durchmesser 01, bestimme nach Vorigem die Lage seiner Ordinaten z. B. nach 23, nehme in der Parabel 45 = 40, in den übrigen Krummen aber 65 der dritten Proportionirten zu 60 und 64 gleich und ziehe durch 5 mit 23 die gleichlaufende 78; so wird diese die Berührungspunkte 7 und 8 bestimmen, weil in jedem Falle $60 = \frac{aa}{4x}$ wird.

43. Für jede zween verwandte Durchmesser a und b, und ihre Parameter p und q verhält sich

$$a : b = b : p \text{ und}$$
$$b : a = a : q, \text{ also auch}$$
$$a : p = q : b.$$

Sind also von der Elipse oder Hyperbel

1tens zwenn verwandte Durchmesser a und b,

2tens ein Durchmesser a und sein Parameter p,

3tens ein Durchmesser a und der Parameter q des andern

oder 4tens die Parameter p und q gegeben; so findet man für den ersten Fall durch die erste Proportion p und durch die zwote q. Für den zweyten Fall aus der ersten Proportion b und sodann aus der zwoten q. Für den dritten Fall nach der zwoten Proportion b und sodann nach der ersten p; Für den vierten Fall bleiben a und b nach der dritten Proportion unbestimmt.

Ist

Ist die Summe oder der Unterscheid m der verwandten Durchmesser nebst dem Parameter p des einen a gegeben; so wird nach dieser Bedingung

$$a + b = m$$

$$a - b = m \text{ oder}$$

$$b - a = m$$

und aus der ersten Proportion

$$a = \frac{bb}{p}, \text{ also}$$

$$\frac{bb}{p} + b = m$$

$$\frac{bb}{p} - b = m \text{ oder}$$

$$b - \frac{bb}{p} = m; \text{ folglich}$$

im ersten Fall $b = \sqrt{\frac{pp}{4} + pm} - \frac{p}{2}$

im zweyten Fall $b = \sqrt{\frac{pp}{4} + pm} + \frac{p}{2}$

und im dritten Fall $b = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - pm}$;

sodann wird $a = m - b$

$$a = m + b \text{ oder}$$

$$a = b - m$$

und in jedem Falle $q = \frac{aa}{b}$.

Die Entfernung der beeden Brennpunkte sey $= n$; so ist

in

in der Elipse $\frac{n}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} - \frac{bb}{4}}$ und

in der Hyperbel $\frac{n}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}}$.

Wird also nebst dieser Entfernung n noch eine Achse a oder b, oder ein Parameter p oder q einer Achse gegeben; so findet man aus diesen Gleichungen

Im ersten Falle

für die Elipse $b = \sqrt{aa - nn}$

für die Hyperbel $b = \sqrt{nn - aa}$

Im 2ten Falle

für die Elipse $a = \sqrt{nn + bb}$

für die Hyperbel $a = \sqrt{nn - bb}$

Im 3ten Falle, nachdem man ap anstatt bb setzet

für die Elipse $a = \sqrt{\frac{pp}{4} + nn} + \frac{p}{2}$

für die Hyperbel $a = \sqrt{\frac{pp}{4} + nn} - \frac{p}{2}$

Im vierten Falle, nachdem man bq anstatt aa setzet

für die Elipse $b = \sqrt{\frac{qq}{4} - nn} + \frac{q}{2}$

fü die Hyperbel $b = \sqrt{\frac{qq}{4} + nn} - \frac{q}{2}$

Von der gleichseitigen Hyperbel.

Fig. 73.

44. Da die durch den Ursprung 2 einer Hyperbel gezogene Tangente 49 allemal auf die erste Achse senkrecht und der zwoten gleich ist; so wird der Winkel 204 gleich, grösser oder kleiner als 45°, nachdem 24 gleich, grösser oder kleiner als 20 ist.

Oder der Assymptotenwinkel 409 ist ein rechter, stumpfer oder spitzer Winkel, nachdem die zwote Achse 49 gleich, größer oder kleiner als die erste 21 ist. In jeder Hyperbel ist $bb = ap$, in der gleichseitigen aber $a = p$, also auch $b = a$.

Folglich sind in der gleichseitigen Hyperbel die Achsen gleich und ihre Assymptoten senkrecht auf einander. Ferner wird ihre Gleichung, nachdem man die Abscissen vom Ursprunge oder für die erste und zwote Achse vom Mittelpunkte an rechnet, folgende:

$$yy = ax + xx \quad \text{oder}$$

$$yy = xx - \frac{aa}{4} \quad \text{und}$$

$$yy = xx + \frac{aa}{4}.$$

Die gleichseitige Hyperbel ist also in Ansehung der ungleichseitigen eben das, was der Kreis in Ansehung der Elipse ist.

Weil in jeder Hyperbel die Subtangente 56 der Abscisse 50 gleich, und in der gleichseitigen die Ordinate 58 auf 06 senkrecht ist; so wird wegen der Vollkommen gleichen Dreyecke 850 und 856 auch $80 = 86$. Und ist in einer Hyperbel $80 = 86$; so wird die Grundlinie 06 des gleichschenklichten Dreyeckes 068 durch die Ordinate 85 halbirt; folglich ist 85 senkrecht auf 06.

Da-

Daher sind jede zween verwandte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel einander gleich: und sobald zween verwandte Durchmesser einer Hyperbel einander gleich sind; so ist diese gleichseitig.

45. Es sey für dieselbe Achse a Fig. 74. einen Kreis und eine Elipse, uud Fig. 75. und 76. eine gleichseitige und eine ungleichseitige Hyperbel gezeichnet und zu derselben Abscisse 03 die Ordinaten 34 und 35 gezogen; so ist Fig. 74 Fig. 74. 75. 76.

in dem Kreise $zz = \frac{aa}{4} - xx$ und

in der Elipse $yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}$, also

$$zz : yy = \frac{aa}{4} - xx : \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}$$

$$zz : yy = \left(\frac{aa}{4} - xx\right) aa : \left(\frac{aa}{4} - xx\right) bb$$

$$zz : yy = aa : bb \text{ oder}$$

$$z : y = a : b$$

Für die erste Achse der gleichseitigen Hyperbel ist Fig. 75

$zz = xx - \frac{aa}{4}$ und für jene

der ungleichseitigen $yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$, also

$$zz : yy = xx - \frac{aa}{4} : \frac{bbxx}{aa} - \frac{bb}{4}$$

$$zz : yy = \left(xx - \frac{aa}{4}\right) aa : \left(xx - \frac{aa}{4}\right) bb$$

$$zz : yy = aa : bb \text{ oder}$$

$$z : y = a : b$$

Für die zwote Achse der gleichseitigen Hyperbel ist
Fig. 76

$$zz = xx + \frac{aa}{4} \text{ und}$$

für jene der ungleichseitigen

$$yy = \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4}, \text{ also}$$

$$zz : yy = xx + \frac{aa}{4} : \frac{bbxx}{aa} + \frac{bb}{4}$$

$$zz : yy = \left(xx + \frac{aa}{4}\right) aa : \left(xx + \frac{aa}{4}\right) bb$$

$$zz : yy = aa : bb \text{ oder}$$

$$z : y = a : b.$$

Daher verhält sich die Ordinate des Kreises zu jener der Elipse, oder die Ordinate der gleichseitigen Hyperbel zu jener der ungleichseitigen, wie die Achse, worauf die Ordinaten gezogen sind, zu der andern Achse.

Von den verwandten Hyperbeln.

Fig. 77. 46. Wenn man aus demselben Mittelpunkte auf verwechselten Achsen zwo Hyperbeln zeichnet; so werden solche **Verwandte** genennt.

Zieht man 23 gleichlaufend mit 45; so ist sowohl das Rechteck 01 × 12 als das Rechteck 01 × 13 = $\frac{aa + bb}{16}$, also 12 = 13.

Daher sind in verwandten Hyperbeln die Ordinaten zur Assymptote für dieselbe Abscisse einander gleich.

Nimmt man ferner 16 = 10 und zieht die Tangenten 62 und 63 nebst den ersten Durchmessern 27 und 38; so wird 04 das Doppelte von 13, und 05 das Doppelte von 12, oder 04 = 05 = 23, folglich 34 = 02, und 25 = 03, also der zweyte Durchmes-

ser 64 dem ersten 27, und der zweyte 65 dem ersten 38 gleich;

In den verwandten Hyperbeln sind also auch die verwandten Durchmesser verwechselt.

Von dem Flächeninhalte der Kegelschnitte.

47. Halbirt man die Sehne ab durch den Durchmesser co; so ist das Dreyeck aob, weil die Tangente om mit ab gleichläuft, das größte aus allen Dreyecken, welche auf der Grundlinie ab in dem Abschnitte boa der Parabel gezeichnet werden können. Und zeichnet man eben so auf der Sehne ob in dem Abschnitte odb das größte Dreyeck dob; so wird of eine Ordinate zu dem Durchmesser df, also die Subtangente ef das Doppelte von der Absciße df, und die Sehne ob das Doppelte von of. Fig. 78.

Zieht man fg gleichlaufend mit ab; so ist das Dreyeck $ofg = oef = 2\,odf = odb$.

Es verhält sich aber

$$of : ob = 1 : 2, \text{ also}$$
$$ofg : obc = 1 : 4, \text{ folglich ist}$$
$$odb = ofg = \frac{obc}{4}, \text{ und eben so}$$
$$oha = \frac{oac}{4}, \text{ also auch}$$
$$odb + oha = \frac{aob}{4}.$$

Schreibt man also einem Abschnitte der Parabel das Größte, den zween folgenden Abschnitten zwey Größte, den vier folgenden Abschnitten vier größte Dreyecke ein u. s. f.; so erhält man jedesmal ein Glied einer bis ins Unendliche abnehmender geometrischen Progreßion, deren erstes Glied das größte Dreyeck, und der Nenner der Progreßion $\frac{1}{4}$ ist.

Folglich wird der Flächeninhalt des parabolischen Abschnittes aob (nach Nr. 241 Rechenk.). vier Drittel des größten Dreyeckes aob oder zwey Drittel des dem Abschnitte umschriebenen Parallelogrammes abmn.

Fig. 74. 75. 76. Ist auf derselben Achse a ein Kreis und eine Elipse, oder eine gleichseitige und eine ungleichseitige Hyperbel gezeichnet, und man nimmt (Fig. 74. 75. 76.) 38 unendlich klein und zieht 46 und 57 senkrecht auf die Ordinaten 34 und 35; so verhalten sich die Rechtecke 36 : 37 = 34 : 35 = a : b.

Es wird aber die Summe der unendlich vielen Rechtecke, welche jedem Kegelschnitte umschrieben werden können, seinem Flächeninhalte gleich.

Folglich verhält sich der Kreis zu der Elipse oder die gleichseitige Hyperbel zu der ungleichseitigen wie eben diese Achse a zu der andern b.

Es verhalte sich der Durchmesser zum Umfange wie d : c; so wird der auf dem Durchmesser a beschriebene Kreis $= \frac{caa}{4d}$, folglich die Elipse, deren Achsen a und b sind, $= \frac{cab}{4d}$.

Von dem Inhalte der durch Kegelschnitte erzeugten Körper.

Fig. 79. 48. Sind um die Parabel an unendlich viel gleich hohe Rechtecke ag, bk, cm, dn und so fort beschrieben, und die ganze Figur dreht sich um die Achse ae; so erzeugt die vermischlinichte Fläche aen eine **Paraboloide** und jene Rechtecke umschreiben eben dieser unendlich viele Cylinder, deren Summe der Paraboloide gleich ist.

Diese Cylinder verhalten sich wegen, der gleichen Höhen wie ihre Grundflächen oder wie die Quadrate ihrer

ner Halbmesser bg, ck, dm, en, folglich wie die Abscissen ab, ac, ad, ae, also wie 1 : 2 : 3 : 4 : u. s. f. Diese Cylinder machen also eine arithmetische Progression von unendlich viel Gliedern aus. Das erste Glied ist = 0 das letzte Glied aber wird wegen der unendlich kleinen Höhe de durch den Kreis des Halbmessers en, und die Anzahl der Glieder durch die Abscisse ae ausgedrückt. Daher wird die Paraboloide dem Produkte aus eben diesem Kreise in die halbe Höhe ae, oder der Hälfte des ihr umschriebenen Cylinders gleich.

Sind dem Kreise und der Elipse unendlich viel Rechtecke, ps, pn umschrieben, und die Figuren drehen sich um ihre gemeinschäftliche Achse a; so erzeugt der Kreis eine Kugel und die Elipse eine **Elipsoide**, jene Rechtecke aber umschreiben beyden unendlich viel Cylinder. Die Summe der von den Rechtecken ps erzeugten Cylinder wird der Kugel und die Summe der von den Rechtecken pn erzeugten der Elipsoide gleich; jene verhalten sich zu diesen wegen der gemeinen Höhen pq wie die Kreise der Halbmesser pr zu den Kreisen der Halbmesser pm, also wie $pr^2 : pm^2$ oder wie aa : bb. Fig. 80.

Wenn also eine Kugel und Elipsoide eine gleiche Achse haben; so verhält sich die Kugel zu der Elipsoide wie das Quadrat eben dieser Achse zu dem Quadrate der andern Achse.

Nach dem Verhältnisse d : c des Durchmessers zum Umfange wird der auf der Achse a beschriebene Kreis $= \frac{caa}{4d}$ und die Kugel $= \frac{ca^3}{6d}$, also die Elipsoide $= \frac{cabb}{16d} = \frac{cbb}{4d} \times \frac{2a}{3}$.

Folglich ist die Elipsoide (so wie die Kugel) allzeit zwey Drittel des ihr umschriebenen Cylinders.

Fig. 81. Sind der Hyperbel paq und dem zwischen ihren Assymptoten enthaltenen Trapeze yzrs unendlich viel Rechtecke bf, bh umschrieben, und die ganze Figur drehet sich um die Achse ae: so erzeugt das Trapez azre einen gestutzten Kegel, und die vermischtlinichte Fläche ape eine **Hyperboloide**, jene Rechtecke bf, bh aber umschreiben der Hyperboloide und dem gestutzten Kegel unendlich viel Cylinder, deren Summen diesen beeden Körpern gleich sind.

Nach dem Verhältnisse d : c des Durchmessers zum Umfange wird der durch bh beschriebene Cylinder

$= \frac{c}{4d} \times \overline{bk}^2 \times ab$, und der durch bf beschriebene

$= \frac{c}{4d} \times \overline{bg}^2 \times ab$, also ihr Unterscheid

$= \frac{c}{4d} \times (\overline{bk}^2 - \overline{bg}^2) \times ab$

Es ist aber $\overline{bk}^2 - \overline{bg}^2 = go \times gk = \overline{az}^2$, also jener Unterscheid $= \frac{c}{4d} \times \overline{az}^2 \times ab$.

Eben so findet man den Unterscheid jeder zween folgenden Cylinder $= \frac{c}{4d} \times \overline{az}^2 \times ab$, folglich der Unterscheid des gestutzten Kegels und der Hyperboloide $= \frac{c}{4d} \times \overline{az}^2 \times ae$.

Daher ist dieser Unterscheid dem durch das Rechteck azue beschriebenen Cylinder und die Hyperboloide dem durch das Dreyeck zur beschriebenen Körper gleich.

Von diesen Krummen in dem Kegel selbst betrachtet.

Fig. 82.

49. Wenn eine Ebene den rechten Kegel durch die Achse oder gleichlaufend mit der Grundfläche schneidet; so ist der Schnitt ein auf die Grundfläche senkrechtes Dreyeck 012 oder ein mit derselben gleichlaufender Kreis 3645.

Ist der Schnitt 493 in einem andern Falle; so kann durch die Achse allemal ein auf denselben senkrechtes Dreyeck 012 geführet werden, und dann begegnet der Schnitt nur eine Seite Fig. 83. oder die beeden Seiten desselben Kegels Fig. 84. oder endlich die beeden Seiten der an der Spitze entgegengesetzten Kegel Fig. 85. in den Punkten 9 und 20. Fig. 83. 84. 85.

Führt man nun durch jede zween Punkte 10 und 11 des Durchschnittes der zwo Ebenen 012 und 394 zwo mit der Grundfläche gleichlaufende Ebenen; so entstehen zween Kreise, deren Durchschnitte 34 und 78 mit dem Kegelschnitte 394 auf das Achsendreyeck 012, also auch auf die gerade 9, 11 und auf die Durchmesser 56 und 12 senkrecht sind.

Daher ist $\overline{3,10}^2 = 5,10 \times 6,10$ und

$$\overline{7,11}^2 = 2,11 \times 1,11$$

und wegen der ähnlichen Dreyecke 9, 10, 5 und 9, 11, 2 verhält sich

$5,10 : 2,11 = 9,10 : 9,11.$

Es ist aber Fig. 83. $6,10 = 1,11$, also

$5,10 \times 6,10 : 2,11 \times 1,11 = 9,10 : 9,11.$

und Fig. 84 und 85 verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 20, 10, 6, und 20, 11, 1.

$6,10 : 1,11 = 20,10 : 20,11,$ also

$5,10 \times 6,10 : 2,11 \times 1,11 =$

$9,10 \times 20,10 : 9,11 \times 20,11$

Setzet man endlich 9, 20 = a, 9, 10 = x, 9, 11 = u, 3, 10 = y und 7, 11 = z; so verhält sich nach voriger Proportion

Fig. 83. $yy : zz = x : u$,

Fig. 84. $yy : zz = ax - xx : au - uu$

und Fig. 85. $yy : zz = ax + xx : au + uu$

Die zwey letztern Glieder x und u der ersten Proportion sind Ausdrücke von Linien: die zwey letztern Glieder der zwoten und dritten Proportion aber, so wie die zwey ersten yy und zz, ausdrücke von Flächen.

Multiplicirt man daher die zwey letztern Glieder der ersten Proportion durch eine beständige Linie p, und die zwey letztern Glieder der zwoten und dritten Proportion durch ein beständiges Verhältniß $\frac{p}{a}$ so angenmomen, daß

$$yy = px$$

$$yy = px - \frac{pxx}{a} \text{ und}$$

$$yy = px + \frac{pxx}{a};$$

so wird auch

$$zz = pu$$

$$zz = pu - \frac{puu}{a} \text{ und}$$

$$zz = pu + \frac{puu}{a}.$$

Nachdem also ein Schnitt des rechten Kegels mit einer Seite desselben gleichläuft, die beeden Seiten in demselben Kegel, oder in den entgegengesetzten Kegeln begegnet; so ist dieser Schnitt eine Parabel, Elipse oder Hyperbel.

Fig. 86. Durch die Achse des schiefen Kegels kann allemal ein, aber auch nur ein auf die Grundfläche senkrechtes

Dreyeck

Dreyeck geführet werden. Jeder auf dieses Dreyeck senkrechte Schnitt des schiefen Kegels ist wieder ganz in dem nämlichen Falle eines jeden Schnittes des rechten Kegels eine Parabel, Elipse oder Hyperbel; ausser wenn Fig. 86 der Schnitt 738 mit der Grundfläche antiparallel, das heißt, wenn der Winkel 078 dem Winkel 021 gleich ist.

Denn führt man durch jeden Punkt 3 dieses Schnittes eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene 536; so werden die Dreyecke 684 und 754 ähnlich, also verhält sich

$$48 : 45 = 46 : 47,$$ folglich wird
$$48 \times 47 = 45 \times 46.$$

Wegen des Kreises 536 aber ist

$$\overline{34}^2 = 45 \times 46$$ also auch

für jede Ordinate 34 des Schnittes 738

$$\overline{34}^2 = 48 \times 47.$$

Daher ist der mit der Grundfläche des schiefen Kegels antiparallele Schnitt allemal ein Kreis.

Schneidet man den rechten Cylinder schief auf die Achse nach der Ebene 1234, sodann durch die Achse senkrecht auf diesen Schnitt nach der Ebene 10, 11, 12, 13, endlich durch jede zween Punkte 5 und 6 des Durchschnittes 14 dieser zwo Ebenen senkrecht auf die Achse nach den Ebenen 728 und 930; so werden 25 und 36 senkrecht auf 78, 90 und 14. Setzet man also 46 = x, 63 = y, 45 = u, 52 = z und 41 = a; so erhält man wegen der Kreise 728 und 930 Fig. 87.

$$zz = 57 \times 58$$ uud
$$yy = 69 \times 60,$$

We-

Wegen der ähnlichen Dreyecke 158 und 160

$$a - u : a - x = 58 : 60,$$

und wegen der ähnlichen Dreyecke 457 und 469

$$u : x = 57 : 69, \text{ also}$$

$$au - uu : ax - xx = 57 \times 58 : 69 \times 60,$$

folglich $zz : yy = au - uu : ax - xx$.

Ist nun $\frac{p}{a}(ax - xx) = yy$; so wird

auch $\frac{p}{a}(au - uu) = zz$, also in

allen Punkten des Schnittes 1234.

$$yy = px - \frac{pxx}{a}.$$

Daher ist jeder auf die Achse schiefer Schnitt des rechten Cylinders eine Elipse.

Von einigen nothwendigen trigonometrischen Formeln.

Fig. 88. 50. Es seyn für den Bogen 32 = z alle Funktionen nach Nro. 383. Meßk. vorgestellet, und 1 für den Halbmesser 02 angenommen; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 043 und 025.

1. $\text{Kos } z : \text{Sin } z = 1 : \text{Tang } z = \frac{\text{Sin } z}{\text{Kos } z}$

2. $\text{Kos } z : 1 = 1 : \text{Sek } z = \frac{1}{\text{Kos } z}$

wegen der ähnlichen Dreyecke 063 und 078,

3. $\text{Sin } z : \text{Kos } z = 1 : \text{Kot } z = \frac{\text{Kos } z}{\text{Sin } z}$

Sin.

$$\text{Sin } z : 1 = 1 : \text{Kosk } z = \frac{1}{\text{Sin } z} \qquad 4.$$

wegen der ähnlichen Dreyecke 025 und 078

$$\text{Tang } z : 1 = 1 : \text{Kot } z = \frac{1}{\text{Tang } z} \qquad 5.$$

Ferner ist wegen der rechtwinklichten Dreyecke 025, 043 und 078

$$\text{Tang}^2 z = \text{Sek}^2 z - 1 \qquad 6.$$

$$\text{Sin}^2 z = 1 - \text{Kos}^2 z \qquad 7.$$

$$\text{Kot}^2 z = \text{Kosk}^2 z - 1 \qquad 8.$$

und, weil 24 **Quersinus** und 67 **Querkosinus** heißt,

$$\text{Qsin } z = 1 - \text{Kos } z \qquad 9.$$

$$\text{Qkos } z = 1 - \text{Sin } z. \qquad 10.$$

Sodann ist aus 2 und 6

$$\text{Kos}^2 z = \frac{1}{\text{Sek}^2 z} = \frac{1}{1 + \text{Tang}^2 z}, \qquad 11.$$

aus 4 und 8

$$\text{Sin}^2 z = \frac{1}{\text{Kosk}^2 z} = \frac{1}{1 + \text{Kot}^2 z}, \qquad 12.$$

aus 2, 3, 5 und 6, da das Zeichen (.) soviel als dieses (×) bedeutet,

$$\frac{\text{Kos}^2 z}{\text{Sin } z} = \frac{1}{\text{Sek } z} \cdot \frac{\text{Kos } z}{\text{Sin } z} = \frac{1}{\text{Sek } z} \cdot \text{Kot } z \qquad 13.$$

$$= \frac{1}{\text{Sek } z \,\text{Tang } z} = \frac{1}{\text{Sek } z \sqrt{\text{Sek}^2 z - 1}},$$

aus 4, 1, 5 und 8

$$\frac{\text{Sin}^2 z}{\text{Kos } z} = \frac{1}{\text{Kosk } z} \cdot \frac{\text{Sin } z}{\text{Kos } z} = \frac{1}{\text{Kosk } z} \cdot \text{Tang } z \qquad 14.$$

$$= \frac{1}{\text{Kosk } z \,\text{Kot } z} = \frac{1}{\text{Kosk } z \sqrt{\text{Kosk}^2 z - 1}}$$

aus

aus 7 und 9, und aus 7 und 10.

15. $\text{Sin}\ z = \sqrt{1 - \text{Kos}^2\ z} = \sqrt{1 - (1 - \text{Qsin}\ z)^2}$
$= \sqrt{2\ \text{Qsin}\ z - \text{Qsin}^2\ z}$

16. $\text{Kos}\ z = \sqrt{1 - \text{Sin}^2\ z} = \sqrt{1 - (1 - \text{Qkos}\ z)^2}$
$= \sqrt{2\ \text{Qkos}\ z - \text{Qkos}^2\ z}$.

Fig. 89. Nennt man endlich in jedem Dreyecke abc die Seiten, welche den Winkeln a, b und c gegenüber stehen, A, B und C; so verhält sich nach Nro. 400 Meßk.

$$A : C = \text{Sin}\ a : \text{Sin}\ c :$$

folglich ist $\frac{A}{C} = \frac{\text{Sin}\ a}{\text{Sin}\ c}$.

Zieht man die Senkrechte ad; so verhält sich ferner

$1 : C = \text{Sin}\ b : ad = C\ \text{Sin}\ b$ und
$1 : C = \text{Kos}\ b : bd = C\ \text{Kos}\ b$
also ist $dc = A - C\ \text{Kos}\ b$

Endlich verhält sich

$$ad : 1 = dc : \text{Kot}\ c = \frac{A - C\ \text{Kos}\ b}{C\ \text{Sin}\ b},$$

folglich ist aus 3

$$\frac{\text{Kos}\ c}{\text{Sin}\ c} = \frac{A}{C\ \text{Sin}\ b} - \frac{\text{Kos}\ b}{\text{Sin}\ b}$$

und wenn man anstatt $\frac{A}{C}$

seinen Werth $\frac{\text{Sin}\ a}{\text{Sin}\ c}$ setzet,

$$\frac{\text{Kos}\ c}{\text{Sin}\ c} = \frac{\text{Sin}\ a}{\text{Sin}\ c\ \text{Sin}\ b} - \frac{\text{Kos}\ b}{\text{Sin}\ b},$$

sodann beederseits durch Sin c Sin b multiplicirt,

$\text{Sin}\ b\ \text{Kos}\ c = \text{Sin}\ a - \text{Kos}\ b\ \text{Sin}\ c$, oder

Sin.

$\text{Sin } a = \text{Sin } b \text{ Kos } c + \text{Kos } b \text{ Sin } c.$ 17.

Eben so ist auch

$\text{Sin } b = \text{Sin } a \text{ Kos } c + \text{Kos } a \text{ Sin } c,$

anstatt Sin a seinen Werth aus 17 gesetzt,

$\text{Sin } b = \text{Sin } b \text{ Kos}^2 c + \text{Sin } c \text{ Kos } c \text{ Kos } b + \text{Sin } c \text{ Kos } a$

anstatt Kos² c aus 7 seinen Werth $1 - \text{Sin}^2 c$ gesetzt,

$\text{Sin } b = \text{Sin } b - \text{Sin } b \text{ Sin}^2 c + \text{Sin } c \text{ Kos } c \text{ Kos } b + \text{Sin } c \text{ Kos } a$

$0 = -\text{Sin } b \text{ Sin}^2 c + \text{Sin } c \text{ Kos } c \text{ Kos } b + \text{Sin } c \text{ Kos } a$

$0 = -\text{Sin } b \text{ Sin } c + \text{Kos } b \text{ Kos } c + \text{Kos } a,$

also

$\text{Kos } a = \text{Sin } b \text{ Sin } c - \text{Kos } b \text{ Kos } c$ 18.

Da der Sinus bis auf 180 Grade dieselbe Bezeichnung behält, der Kosinus hingegen bey 90 Graden = 0 wird, und sodann eine entgegengesetzte Bezeichnung bekömmt; so wird

$\text{Sin } a = \text{Sin } (180° - a)$

und

$\text{Kos } a = -\text{Kos } (180° - a)$

Es ist aber in dem Dreyecke abc, $180° - a = b + c$

also aus 17

$\text{Sin } (b+c) = \text{Sin } b \text{ Kos } c + \text{Sin } c \text{ Kos } b$ 19.

und aus 18

$-\text{Kos } (b+c) = \text{Sin } b \text{ Sin } c - \text{Kos } b \text{ Kos } c$

oder

$\text{Kos } (b+c) = \text{Kos } b \text{ Kos } c - \text{Sin } b \text{ Sin } c$ 20.

Läßt

Läßt man anstatt des innern Winkels b den äussern mba gelten; so ist a = b — c, und der Kosinus b verändert seine Bezeichnung, folglich wird aus 17

21. $\text{Sin}\,(b-c) = \text{Sin}\,b\,\text{Kos}\,c - \text{Kos}\,b\,\text{Sin}\,c$

und aus 18

22. $\text{Kos}\,(b-c) = \text{Sin}\,b\,\text{Sin}\,c + \text{Kos}\,b\,\text{Kos}\,c.$

Addirt man die Gleichungen 19 und 21; so wird

23. $\text{Sin}\,b\,\text{Kos}\,c = \frac{1}{2}\,\text{Sin}\,(b+c) + \frac{1}{2}\,\text{Sin}\,(b-c)$

Endlich geben die Gleichungen 20 und 22 addirt und abgezogen

24. $\text{Kos}\,b\,\text{Kos}\,c = \frac{1}{2}\,\text{Kos}\,(b+c) + \frac{1}{2}\,\text{Kos}\,(b-c)$

25. $\text{Sin}\,b\,\text{Sin}\,c = \frac{1}{2}\,\text{Kos}\,(b-c) - \frac{1}{2}\,\text{Kos}\,(b+c)$

51. Weil nur Größen von derselben Anzahl Ausmessungen miteinander verglichen werden können; so ist es leicht jede Formel für den Halbmesser 1 in jene für einen andern Halbmesser a zu verwandeln, wenn man sich dessen, was Nro. 210 und 212 Meßk. von der Anzahl der Ausmessungen eines jeden Ausdruckes abgehandelt worden ist, erinnert. Weil zum Beyspiele in dieser Gleichung

$$\frac{\text{Kos}\,z}{\text{Sin}\,z} = \frac{1}{\text{Sek}\,z\sqrt{\text{Sek}^2\,z - 1}}$$

das erste Glied nur eine Ausmessung hat; so muß das zweyte Glied ebenfalls nur in einer Ausmessung bestehen; der Nenner von diesem hat aber zwo Ausmessungen, folglich müssen drey im Zähler seyn. Ferner ist 1 im Nenner von einer Größe zwoer Ausmessungen abgezogen, also kann anstatt dessen nur wieder eine Größe von zwo Ausmessungen gesetzet werden. Diesem nach wird die obige Gleichung für den Halbmesser a in folgende verwandelt

$$\frac{\text{Kos}^2\,z}{\text{Sin}\,z} = \frac{a^3}{\text{Sek}\,z\sqrt{\text{Sek}^2\,z - a^2}}.$$

Eben

Eben so erhält man aus der Gleichung

$$Kos^2\ z = \frac{1}{1 + Tang^2\ z}$$ diese:

$$Kos^2\ z = \frac{a^4}{a^2 + Tang^2\ z}$$

und aus der Gleichung

$$Sin\ z = \sqrt{2\ Qsin\ z - Qsin^2\ z}$$ folgende:

$$Sin\ z = \sqrt{2a\ Qsin\ z - Qsin^2\ z}$$, u. s. f.

Von dem Unendlichkleinen und Undendlichgroßen.

52. Das Unendlichkleine ist = 0, Nro. 120 Rechteck.

Ist a unendlichmal in x enthalten, so ist x in Ansehung a unendlich groß, und a in Ansehung x unendlich klein; also wird in Ansehung einer unendlichgroßen Größe x auch jede endliche a = 0.

Dieses ist eben nicht so unbegreiflich. In Ansehung eines Brunnens, welchem seine Quelle bey beständigem Schöpfen das Wasser immer ersetzet, wird jedes geschöpfte Wasser = 0: indem dieser Brunn vor- und nach jedem Schöpfen immer gleich ergiebig bleibt.

Sind die Faktoren r, s, u unendlichklein, a, b, c endlich und X, Y, Z unendlichgroß; so ist das Produkt

rsu in asu
asu in abu
abu in abc
abc in Xbc
Xbc in XYc und
XYc in XYZ

so oft als r in a, s in b, u in c, a in X, b in Y, und c in Z, also unendlichmal enthalten: folglich ist jedes aus diesen Produkten in Ansehung des darauf folgenden unendlichklein, oder = 0.

Ein unendlichgroßes oder unendlichkleines Produkt heißt von der **ersten, zwoten**, oder **dritten Ordnung**, nachdem es nur einen, zween oder drey unendlichgroße oder unendlichkleine Faktoren enthält.

Jedes unendlichgroße Produkt Xbc, XYc, XYZ wird also in Ansehung eines unendlich großen von einer höheren Ordnung unendlichklein, und jedes unendlichkleine Produkt abu, asu, rsu wird in Ansehung eines unendlichkleinen von einer höheren Ordnung unendlichgroß.

Fig. 90. Es stehe auf dem Rechtecke 32 ein rechtes Parallelepiped 12 von endlichen Ausmessungen a, b, c; und man lasse erstlich a, sodann auch b und endlich noch c unendlichgroß = X, Y, Z oder unendlichklein = r, s, u werden; so verwandelt sich das endliche Parallelepiped abc nach einander in die unendlichgroßen Xbc, XYc, XYZ der ersten, zwoten und dritten Ordnung oder in die unendlichkleinen rbc, rsc, rsu, = 42, 52, 62 der ersten, zwoten und dritten Ordnung.

53. Die Bedingung, daß in einem zusammengesetzten Ausdrucke unendliche Größen vorkommen, auszudrücken, hat man nur eine, aber eine der Natur der Sache vollkommen angemessene Methode, diese: daß man alle Theile des zusammengesetzten Ausdruckes, welche in Ansehung anderer unendlich klein sind, wirklich als 0 betrachtet und wegläßt. So wird bey obiger Voraussetzung

$$XYZ + XYc + Xbc + abc + rbc + rsc + rsu = XYZ,$$

$$XYc + Xbc + abc + rbc + rsc + rsu = XYc,$$

Xbc

$xbc + abc + rbc + rsc + rsu = xbc,$
$abc + rbc + rsc + rsu = abc$
$rbc + rsc + rsu = rbc$
$rsc + rsu = rsc.$

Von der geraden Methode der Reihen.

54. Unter **Reihen** versteht man hier jeden zusammengesetzten Ausdruck, dessen Theile nach einem beständigen Gesetze wachsen oder abnehmen, und bis ins Unendliche oder auch nur bis auf eine bestimmte Anzahl Glieder fortgehen.

Dividirt man nach Nro. 90. u. folg. Rechenk. 1 durch $a+x$, $a+x^2$, $a+x^{\frac{1}{2}}$; so wird

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a+x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^6}{a^4} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a+x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^2} + \frac{x}{a^3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^4} + \ldots\ldots$$

Bey diesen unendlichen Reihen, in welche obige Brüche aufgelöset werden, läßt sich leicht bemerken, daß jede Reihe aus den auf einander folgenden Potenzen des einen Theils x, x^2 oder $x^{\frac{1}{2}}$ des Nenners besteht, und daß die Koefficienten dieser Potenzen nur allein von dem andern Theile a des Nenners abhangen. Setzet man also

$$\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a+x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots\ldots$$

 $\frac{1}{a+x^{\frac{1}{2}}}$

$$\frac{1}{a + x^{\frac{1}{2}}} = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots ;$$

so kann man diese Reihen auch ohne Dividiren erhalten, wenn man nur für jeden Bruch die Koefficienten A, B, C, D, u. s. f. zu bestimmen im Stande ist.

Es sey daher

$$\frac{1}{a + x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots ;$$

so wird, wenn man beederseits mit $a + x$ multiplicirt und 1 abzieht,

$$0 = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + \ldots\ldots$$
$$- 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots\ldots$$

Nun da die Koeffizienten A, B, C, D allein von a abhangen; so müssen solche für jeden Werth von x dieselben bleiben. Ist aber x unendlichklein; so wird die Gleichung nach Nro. 53.

$0 = aA - 1$, folglich auch

$$0 = aBx + aCx^2 + aDx^3 + \ldots\ldots$$
$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots\ldots$$

oder, durch x dividirt,

$$0 = aB + aCx + aDx^2 + \ldots\ldots$$
$$+ A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

Also, weil x unendlichklein ist, nach Nro. 53.

$0 = aB + A$, folglich auch

$$0 = aCx + aDx^2 + \ldots\ldots$$
$$+ Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

oder, durch x dividirt,

$$0 = aC + aDx + \ldots\ldots$$
$$+ B + Cx + \ldots\ldots$$

Also

Also wieder, weil x unendlichklein ist nach Nro. 53.

$o = aC + B$, folglich auch
$o = aDx$
$+ Cx$ oder, durch x dividirt,
$o = aD + C$.

Es ist also im Falle x unendlichklein ist, folglich in jedem Falle

$aA - 1 = o$, und $A = \frac{1}{a}$

$aB + A = o$, und $B = -\frac{1}{a^2}$

$aC + B = o$, und $C = \frac{1}{a^3}$

$aD + C = o$, und $D = -\frac{1}{a^4}$

folglich

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots$$

wie zuvor.

Es werden also für jeden Bruch die Koefficiente A, B, C, D, u. s. f. bestimmt, wenn man die Gleichung auf o bringt, indem man beederseits durch den Nenner multiplicirt und den Zähler abzieht, sodann jede Summe der Koefficienten von derselben Potenz von x besonders = o setzet, und noch diese besondern Gleichungen auflöset.

So wird 1tens

$$\frac{1}{a^2-x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} o = & a^2A + a^2Bx^2 + a^2Cx^4 + a^2Dx^6 + \ldots\ldots \\ & - 1 - Ax^2 - Bx^4 - Cx^6 - \ldots\ldots \end{aligned}$$

also $a^2A - 1 = 0$, und $A = \frac{1}{a^2}$

$a^2B - A = 0, \ldots \ldots B = \frac{1}{a^4}$

$a^2C - B = 0, \ldots \ldots C = \frac{1}{a^6}$

$a^2D - C = 0, \ldots \ldots D = \frac{1}{a^8}$ und

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} + \ldots\ldots$$

2tens

$$\frac{1}{1 - x^{\frac{1}{2}}} = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$$

$$0 = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$$
$$- 1 - Ax^{\frac{1}{2}} - Bx - Cx^{\frac{3}{2}} - \ldots\ldots$$

also $A - 1 = 0$, und $A = 1$
$B - A = 0, \ldots \ldots B = 1$
$C - B = 0, \ldots \ldots C = 1$
$D - C = 0, \ldots \ldots D = 1$, und

$$\frac{1}{1 - x^{\frac{1}{2}}} = 1 + x^{\frac{1}{2}} + x + x^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$$

3tens

$$\frac{1}{1 + x + x^3} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

$$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$
$$- 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$
$$+ Ax^3 + Bx^4 + \ldots$$

also $A - 1 = 0$, und $A = 1$
$B + A = 0, \ldots \ldots B = -1$
$C + B = 0, \ldots \ldots C = 1$

D +

$D + C + A = 0, \quad . \quad . \quad D = -2$
$E + D + B = 0, \quad . \quad . \quad . \quad E = 3$ und

$$\frac{1}{1 + x + x^3} = 1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4 - \ldots$$

4tens

$$\frac{a - x}{a + x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

$$\begin{aligned} 0 = aA &+ aBx + aCx^2 + aDx^3 + \ldots \\ &+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \\ -a &+ x \end{aligned}$$

also $aA - a = 0$, und $A = 1$

$aB + A + 1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad B = -\frac{2}{a}$

$aC + B = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad C = \frac{2}{a^2}$

$aD + C = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D = -\frac{2}{a^3}$ und

$$\frac{a - x}{a + x} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \ldots$$

Endlich 5tens

$$\frac{1 + 2x}{1 - x - x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

$$\begin{aligned} 0 = A &+ Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots \\ &- Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 - \ldots \\ &\qquad - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - \ldots \\ -1 &- 2x \end{aligned}$$

also $A - 1 = 0$, und $A = 1$
$B - A - 2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad B = 3$
$C - B - A = 0, \quad . \quad . \quad . \quad C = 4$
$D - C - B = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D = 7$
$E - D - C = 0, \quad . \quad . \quad . \quad E = 11$ und

$\frac{1 + 2x}{1 - x - x^2}$

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + \ldots$$

Zieht man nach Nro. 161. Rechenk. von $a + x$ die Wurzel aus; so wird

$$\sqrt{a+x} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2.4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3x^3}{2.4.6a^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{1.3.5x^4}{2.4.6.8a^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots\ldots$$

Eben dieses findet man nach voriger Methode. Denn setzet man

$$\sqrt{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

erhebt nach Nro. 159. Rechenk. beyde Glieder zum Quadrate und zieht beederseits $a + x$ ab; so wird

$$\begin{aligned} 0 = A^2 + 2ABx + B^2x^2 &+ 2BCx^3 + C^2x^4 + \ldots \\ + 2ACx^2 &+ 2ADx^3 + 2BDx^4 + . \\ &+ 2AEx^4 + \ldots \\ - a - x & \end{aligned}$$

Also $A^2 - a = 0$, und $A = a^{\frac{1}{2}}$

$2AB - 1 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots$ $B = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$

$B^2 + 2AC = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots$ $C = -\frac{1}{2.4a^{\frac{3}{2}}}$

$2BC + 2AD = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D = \frac{1.3}{2.4.6a^{\frac{5}{2}}}$

$C^2 + 2BD + 2AE = 0, \ldots\ldots$ $E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8a^{\frac{7}{2}}}$

und

$\sqrt{a+x}$

$$\sqrt{a+x} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2\,.\,4a^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{1\,.\,3x^3}{2\,.\,4\,.\,6a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1\,.\,3\,.\,5x^4}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8a^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots$$

Setzet man ferner

$$\sqrt{a^2 - x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots\ldots$$

erhebt beyde Glieder zum Quadrate und zieht $a^2 - x^2$ beederseits ab; so wird

$$\begin{aligned} 0 = A^2 + 2ABx^2 + B^2x^4 &+ 2BCx^6 + C^2x^8 + \ldots\ldots \\ + 2ACx^4 &+ 2ADx^6 + 2BDx^8 + \ldots\ldots \\ &+ 2AEx^8 + \ldots\ldots \\ - a^2 + x^2 & \end{aligned}$$

Also $A^2 - a^2 = 0$, und $A = a$

$2AB + 1 = 0, \ldots\ldots B = -\frac{1}{2a}$

$B^2 + 2AC = 0, \ldots\ldots C = -\frac{1}{2\,.\,4a^3}$

$2BC + 2AD = 0, \ldots\ldots D = -\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6a^5}$

$C^2 + 2BD + 2AE = 0, \ldots E = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8a^7}$

und

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2\,.\,4a^3} - \frac{1\,.\,3x^6}{2\,.\,4\,.\,6a^5}$$

$$- \frac{1\,.\,3\,.\,5x^8}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8a^7} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dieses Verfahren gegebene Größen in Reihen aufzulösen, wird die **gerade Methode der Reihen** genennt.

Von der umgekehrten Methode der Reihen.

55. Diese Methode besteht darinn, daß, wenn eine Größe y mittelst einer Reihe durch x gegeben ist, man auch x mittelst einer Reihe durch y bestimme.

Hierzu gelanget man, wenn man x einer der gegebenen Reihe ähnlichen Reihe von y mit den Koefficienten A, B, C, D u. s. f. gleich setzet, daraus die Werthe der ersten Potenzen von x suchet, in die gegebene Gleichung setzet und die Rechnung wie zuvor vollendet.

Ist z. B.

I. $$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

und man setzet,

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots$$

so wird nach Nro. 159. Rechenk.

$$\begin{array}{rl} x^2 = & A^2y^2 + 2ABy^3 + B^2y^4 \\ & \qquad\qquad\qquad + 2ACy^4 + \ldots \\ x^3 = & \ldots\quad A^3y^3 + 3A^2By^4 + \ldots \\ x^4 = & \ldots\ldots\ldots + A^4y^4 + \ldots \end{array}$$

Diese Werthe von x, x^2, x^3 und x^4 in die gegebene Gleichung gesetzt, und y beederseits abgezogen, giebt:

$$\begin{array}{rl} 0 = & Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots \\ & \quad - \frac{A^2y^2}{2} - ABy^3 - \frac{B^2y^4}{2} \\ & \qquad\qquad - ACy^4 - \ldots \\ & \qquad + \frac{A^3y^3}{3} + A^2By^4 + \ldots \\ & - y \qquad\qquad - \frac{A^4y^4}{4} - \ldots \end{array}$$

Also $A - 1 = 0$, und $A = 1$

$B - \frac{A^2}{2} = 0$, ... $B = \frac{1}{2}$

C—

$$C - AB + \frac{A^3}{3} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; C = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$D - \frac{B^2}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0, D = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

und

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{y^4}{4} + \; . \; . \; .$$

Ist $z = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \; . \; . \; .$ 2.

so wird nach voriger Methode

$$x = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \; . \; . \; .$$

$$x^3 = \; . \; . + A^3z^3 + 3A^2Bz^5 + 3AB^2z^7$$
$$+ 3A^2Cz^7 + \; . \; . \; .$$

$$x^5 = \; . \; . \; . \; . \; . + A^5z^5 + 5A^4Bz^7 + \; . \; . \; .$$

$$x^7 = \; . \; . \; . \; . \; . \; . + A^7z^7 + \; . \; . \; .$$

Diese Werthe in die gegebene Gleichung gesetzt, und beederseits z abgezogen, giebt:

$$0 = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \; . \; . \; .$$
$$- \frac{A^3z^3}{3} - A^2Bz^5 - AB^2z^7$$
$$- A^2Cz^7 - \; . \; . \; .$$
$$+ \frac{A^5z^5}{5} + A^4Bz^7 + \; . \; . \; .$$
$$- z \qquad - \frac{A^7z^7}{7} - \; . \; . \; .$$

Also $A - 1 = 0$, und $A = 1$

$$B - \frac{A^3}{3} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; B = \frac{1}{3}$$

$$C - A^2B + \frac{A^5}{5} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; C = \frac{2}{3 \cdot 5}$$

$$D - AB^2 - A^2C + A^4B - \frac{A^7}{7} = 0, D = \frac{17}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

und

x =

$$x = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^5}{5} + \frac{17}{3 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{z^7}{7} + \ldots$$

Ist endlich

3. $$z = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

so wird nach voriger Methode

$$\begin{aligned}
x &= Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots \\
x^3 &= \ldots\ldots A^3z^3 + 3A^2Bz^5 + 3AB^2z^7 \\
&\qquad\qquad + 3A^2Cz^7 + \ldots \\
x^5 &= \ldots\ldots\ldots + A^5z^5 + 5A^4Bz^7 + \ldots \\
x^7 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A^7z^7 + \ldots
\end{aligned}$$

Diese Werthe in die gegebene Gleichung gesetzt und z beederseits abgezogen, giebt:

$$\begin{aligned}
0 = Az &+ Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots \\
&+ \frac{A^3z^3}{2 \cdot 3} + \frac{A^2Bz^5}{2} + \frac{AB^2z^7}{2} \\
&\qquad + \frac{A^2Cz^7}{2} + \ldots \\
&+ \frac{3A^5z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3A^4Bz^7}{2 \cdot 4} + \ldots \\
- z &\qquad + \frac{3 \cdot 5A^7z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots
\end{aligned}$$

Also $A - 1 = 0$, und $A = 1$

$$B + \frac{A^3}{2 \cdot 3} = 0, \ \ldots\ldots \ B = -\frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$C + \frac{A^2B}{2} + \frac{3A^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} = 0, \ \ldots \ C = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$D + \frac{AB^2}{2} + \frac{A^2C}{2} + \frac{3A^4B}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5A^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \ D = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

und

x =

$$x = z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{z^5}{5} - \frac{1}{2.3.4.5.6} \cdot \frac{z^7}{7}$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Anwendung der Reihen auf die Berechnung der Logarithmen.

56. Vorausgesetzt, es seyn die Logarithmen nach Nro. 247 und 253 Rechenk. in so ferne bestimmt, daß der Unterscheid der arithmetischen Progreßion $= 1$ und $\log 1 = 0$ sey.

Man soll von jeder Zahl $1+x$ ihren Logarithme finden.

Setzet man $(1+x)^2 = 1+y$; so wird

$$\begin{aligned}
y &= 2x + x^2 \\
y^2 &= \ldots 4x^2 + 4x^3 + x^4 \\
y^3 &= \ldots \ldots + 8x^3 + 12x^4 + \ldots \\
y^4 &= \ldots \ldots \ldots + 16x^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Ferner wird

$$2 \log (1+x) = \log (1+y),$$

und setzet man

$$\log (1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

so wird auch

$$\log (1+y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots$$

also

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \ldots$$
$$= Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots$$

Oder, wenn man anstatt y, y^2, y^3, y^4 u. s. f. ihre obigen Werthe setzet,

$$\begin{aligned}
& 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \ldots \\
= & 2Ax + Ax^2 \\
& + 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4 \\
& + 8Cx^3 + 12Cx^4 + \ldots \\
& + 16Dx^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Also

Also, wenn man das erste Glied beederseits abzieht,

$$\begin{array}{l} 0 = 2Ax + Ax^2 \\ \qquad\quad + 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4 \\ \qquad\qquad\qquad + 8Cx^3 + 12Cx^4 + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 16Dx^4 + \ldots\ldots \\ \quad - 2Ax - 2Bx^2 - 2Cx^3 - 2Dx^4 + \end{array}$$

folglich $2A - 2A = 0$, und $A = A$

$A + 2B = 0, \ldots \quad B = -\frac{A}{2}$

$4B + 6C = 0, \ldots \quad C = +\frac{A}{3}$

$B + 12C + 14D = 0, \ . \quad D = -\frac{A}{4}$

und endlich

$$1. \quad \log(1+x) = Ax - \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} + \frac{Ax^5}{5} - \frac{Ax^6}{6} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nimmt man x verneinend; so ändern die ungeraden Potenzen von x ihre Bezeichnung; folglich wird

$$2. \quad \log(1-x) = -Ax - \frac{Ax^2}{2} - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} - \frac{Ax^5}{5} - \frac{Ax^6}{6} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und aus 1 und 2

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2Ax + \frac{2Ax^3}{3} + \frac{2Ax^5}{5} + \frac{2Ax^7}{7} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2A\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots\right) \quad 3.$$

Um eine schnell abnehmende Reihe zu erhalten, setze man ferner $x = \frac{1}{2n+1}$;

so wird $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ und aus 3.

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2A\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \frac{1}{7(2n+1)^7} + \ldots\right)$$

und, weil $n+1 = \left(\frac{n+1}{n}\right) \times n$ ist,

$$\log(n+1) = \log n + 2A\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \frac{1}{7(2n+1)^7} + \frac{1}{9(2n+1)^9} + \ldots\ldots\ldots\right) \quad 4.$$

Ist $n = 1, 2, 3, 4$, u. s. f; so wird

$$\log 2 = 0 + 2A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \ldots\ldots\right)$$

$$\log 3 = \log 2 + 2A\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$\log 4 = 2 \log 2.$

log 5

$$\log 5 = \log 4 + 2A\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \frac{1}{7.9^7} + \frac{1}{9.9^9} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$\log 6 = \log 3 + \log 2.$

$$\log 7 = \log 6 + 2A\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3.13^3} + \frac{1}{5.13^5} + \frac{1}{7.13^7} + \frac{1}{9.13^9} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$\log 8 = 3 \log 2.$
$\log 9 = 2 \log 3.$
$\log 10 = \log 5 + \log 2$, u. s. f., oder

$\log 2 = A\ (0.6931472)$
$\log 3 = A\ (1.0986123)$
$\log 4 = A\ (1.3862944)$
$\log 5 = A\ (1.6094379)$
$\log 6 = A\ (1.7917595)$
$\log 7 = A\ (1.9459101)$
$\log 8 = A\ (2.0794415)$
$\log 9 = A\ (2.1972246)$
$\log 10 = A\ (2.3025851)$

Nimmt man für A die Zahl 1 an; so hat man die **natürlichen** oder **hyperbolischen Logarithmen**, die folglich keine weitere Berechnung erfordern. Nimmt man aber für A jede andere Zahl an, und multiplicirt dadurch alle natürlichen Logarithmen; so erhält man allzeit ein **System** der Logarithmen, welche alle jene bis Nro. 254 Rechenk. abgehandelten Eigenschaften haben.

Es sey umgekehrt von einem gegebenen natürlichen Logarithme seine Zahl zu suchen:

Weil für diese Logarithmen $A = 1$ ist: so hat man aus I.

5. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots$

Ist

Ist nun log $(1+x) = y$; so wird auch

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \quad 6.$$

also aus 1 Nro. 55.

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{y^4}{4} + \ldots\ldots \quad 7.$$

folglich

$$1+x = 1+y + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{y^4}{4} + \ldots \quad 8.$$

Nun, weil $y = \log(1+x)$ ist, und man setzet $1 + x = n$ so wird auch $y = \log n$, also aus 8. jede Zahl

$$n = 1 + \log n + \frac{\log^2 n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log^3 n}{3}, \quad 9.$$

$$+ \frac{1}{2.3} \cdot \frac{\log^4 n}{4} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{\log^5 n}{5}$$

$$+ \frac{1}{2.3.4.5} \cdot \frac{\log^6 n}{6} + \ldots\ldots\ldots$$

Fragt man nun welches die Zahl n sey, deren natürlicher Logarithme 1 ist; so wird diese Zahl

$$n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$+ \frac{1}{2.3.4.5.6} + \ldots\ldots\ldots \text{ oder}$$

$$n = 2.7182818$$

Die Zahl, deren Logarithme 1 ist, wird in jedem Systeme die **Grundzahl** genennt.

So ist 10 die Grundzahl der gemeinen, und 2.7182818 die Grundzahl der natürlichen Logarithmen.

Ferner wird jede Zahl A mit welcher die natürlichen Logarithmen um ein System der Logarithmen zu

erhalten multiplicirt werden müssen, das **Modell** des Systems genennt.

Weil der natürliche Logarithme der Zahl 10 = 2.3025851 ist; so wird, wenn A das Modell der gemeinen Logarithmen ist,

$$A(2.3025851) = 1, \text{ also}$$

$$A = \frac{1}{2.3025851} = 0.4342945.$$

Multiplicirt man also den natürlichen Logarithme jeder Zahl n durch 0.4342945; so erhält man den gemeinen Logarithme eben dieser Zahl n: und multiplicirt man den gemeinen Logarithme jeder Zahl n durch 2.3025851; so kömmt der natürliche Logarithme eben dieser Zahl n zum Vorscheine.

In der Folge wird man unter log ohne besondere Anmerkung allzeit den natürlichen Logarithme verstehen.

Anwendung der Reihen auf die Entwicklung der Potenzen mehrtheiliger Ausdrücke.

57. Es sey $(1+x)^m = 1+y$ und

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$$

so wird auch

$$1+y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$$

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$$

$$y^2 = \ldots + A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots\ldots$$

$$y^3 = \ldots\ldots\ldots + A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots\ldots$$

$$y^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots + A^4x^4 + \ldots\ldots$$

Ferner wird

$$m \log(1+x) = \log(1+y)$$

also aus 5. Nro. 56.

$$mx - \frac{mx^2}{2} + \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^4}{4} + \ldots$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots,$$

Nun

Nun setzet man in dieser Gleichung anstatt y, y^2, y^3, y^4 ihre obigen Werthe, und zieht das erste Glied beederseits ab; so erhält man

$$0 = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$
$$- \frac{A^2x^2}{2} - ABx^3 - \frac{B^2x^4}{2}$$
$$- ACx^4 - \ldots$$
$$+ \frac{A^3x^3}{3} + A^2Bx^4 + \ldots$$
$$- \frac{A^4x^4}{4} - \ldots$$
$$- mx + \frac{mx^2}{2} - \frac{mx^3}{3} + \frac{mx^4}{4} - \ldots$$

Also $A - m = 0$, und $A = m$

$B - \frac{A^2}{2} + \frac{m}{2} = 0 \ldots\ldots B = \frac{m(m-1)}{1.2}$

$C - AB + \frac{A^3}{3} - \frac{m}{3} = 0 \ldots C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$

$D - \frac{B^2}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} + \frac{m}{4} = 0,$

$\ldots\ldots\ldots D = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$

folglich

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}.x^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}.x^4 + \ldots$$

Setzet man $x = \frac{b}{a}$; so wird

$$(1+x)^m = \left(1+\frac{b}{a}\right)^m = \frac{(a+b)^m}{a^m}; \text{ also}$$

 $\frac{(a+b)^m}{a^m}$

$$\frac{(a+b)^m}{a^m} = 1 + m \cdot \frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{b^4}{a^4} + \ldots$$

oder

$$(a+b)^m = a^m + ma^m \cdot \frac{b}{a} + \frac{m(m-1)a^m}{1.2} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)a^m}{1.2.3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)a^m}{1.2.3.4} \cdot \frac{b^4}{a^4} +$$

Kürzet man ab; so erhält man

Die erste Formel

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4}b^4 + \ldots$$

Oder setzet man $\frac{b}{a} = Q$ und nennt das erste Glied **A**, das zweyte **B**, das dritte **C**, das vierte **D**, u. s. f; so erscheint

Die zwote Formel

$$(a+b)^m = A + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ$$

$$+ \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \ldots\ldots$$

Setzet man endlich in dieser letztern $m = \frac{r}{s}$; so wird

Die

Die dritte Formel

$$(a+b)^m = A + \frac{r}{s} AQ + \frac{r-s}{2s} BQ + \frac{r-2s}{3s} CQ + \frac{r-3s}{4s} DQ + \ldots$$

Nach diesen drey Formeln läßt sich jeder mehrtheilige Ausdruck zu jeder Potenz erheben, wenn man den ersten Theil desselben = á und die Summe aller übrigen = b setzet.

Für $(1 - c^2x^2)^{\frac{r}{2}}$ wird $Q = - c^2x^2$,

$$A = 1,\ B = - \frac{c^2x^2}{2},\ C = - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^4x^4}{4}$$

$$D = - \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{c^6x^6}{6},\ E = - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{c^8x^8}{8}$$

also

$$(1-c^2x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{c^2x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^4x^4}{4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{c^6x^6}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{c^8x^8}{8} - \ldots \qquad 1.$$

Für $(c^2x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ wird $Q = - \frac{1}{c^2x^2}$,

$$A = cx,\ B = - \frac{1}{2cx},$$

$$C = - \frac{1}{2 \cdot 4c^3x^3},\ D = - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6c^5x^5}$$

$$E = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8c^7x^7}$$

also

$$(c^2x^2-1)^{\frac{1}{2}} = cx - \frac{1}{2cx} - \frac{1}{2 \cdot 4c^3x^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6c^5x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8c^7x^7} - \ldots \qquad 2.$$

Für $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ wird $Q = - x^2$, $r = - 1$

$s = 2, A = 1, B = \frac{x^2}{2}, C = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4,$

$$D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6, E = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8$$

also

3. $$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8 + \ldots$$

Für $(1+x^2)^{-1}$ wird $Q = x^2$, $m = -1$

$$A = 1, B = -x^2, C = +x^4, D = -x^6$$

also

4. $$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - .$$

Für $(a + bx^m)^q$ wird nach der ersten Formel $m = q$,

5. also $$(a + bx^m)^q = a^q + \frac{q}{1} \cdot a^{q-1}bx^m + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{q-2}b^2x^{2m} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{q-3}b^3x^{3m} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{q-4}b^4x^{4m} +$$

Endlich wird noch

Für $(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})^2$

$$Q = \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}} = x^2 - x,$$

$$A = x^{-1}, B = x^{-1}(2x^2 - 2x)$$
$$C = x^{-1}(x^4 - 2x^3 + x^2), \text{ also}$$

$$(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})^2 = x^{-1}(1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4) = \frac{1}{x} - 2 + 3x - 2x^2 + x^3 - \ldots$$

Von den Eigenschaften der höheren Gleichungen.

58. **Unter höhern Gleichungen** versteht man jene, des 2ten, 3ten, 4ten Grades u. s. f.

Wenn man die Faktoren $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, u. s. f. miteinander multiplicirt; so wird das Produkt aus zweeen

$$\begin{aligned} = x^2 &- ax + ab \\ &- bx \end{aligned}$$

jenes aus drey

$$\begin{aligned} = x^3 &- ax^2 + abx - abc \\ &- bx^2 + acx \\ &- cx^2 + bcx \end{aligned}$$

jenes aus vier

$$\begin{aligned} = x^4 &- ax^3 + abx^2 - abcx + abcd \\ &- bx^3 + acx^2 - abdx \\ &- cx^3 + bcx^2 - acdx \\ &- dx^3 + adx^2 - bcdx \\ &\qquad + bdx^2 \\ &\qquad + cdx^2 \end{aligned}$$

Und sind die Faktoren $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, u. s. f., so wird das Produkt aus zweeen

$$\begin{aligned} = x^2 &+ ax + ab \\ &+ bx \end{aligned}$$

jenes aus drey

$$\begin{aligned} = x^3 &+ ax^2 + abx + abc \\ &+ bx^2 + acx \\ &+ cx^2 + bcx \end{aligned}$$

jenes aus vier

$$
\begin{aligned}
= x^4 &+ ax^3 + abx^2 + abcx + abcd\\
&+ bx^3 + acx^2 + abdx\\
&+ cx^3 + bcx^2 + acdx\\
&+ dx^3 + adx^2 + bcdx\\
& + bdx^2\\
& + cdx^2
\end{aligned}
$$

Ein Produkt wird = 0, so bald ein aus seinen Faktoren = 0 ist. Dieses geschieht, wenn x im ersten Falle = + a, + b, + c oder + d, und im zweyten Falle = — a, — b, — c oder — d ist.

Diese Werthe von x für den Fall, in welchem das Produkt = 0 ist, werden **Wurzeln** genennt.

Ein solches Produkt hat also allzeit eben so viel Wurzeln als Faktoren, oder als der höchste Exponent von x Einheiten hat.

In einem solchen Produkte giebt es eben so viel Abwechslungen der Zeichen + und — als bejahende Wurzeln, wie im ersten Falle, und eben so viel Folgen der Zeichen + und + oder — und — als verneinende Wurzeln, wie im zweyten Falle.

Drückt man ein solches Produkt für den Fall, in welchem es = 0 wird, allgemein durch folgende Gleichung aus:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + .. + R = 0;$$

so wird A der Summe aller Wurzeln, B der Summe aller Produkte aus je zwo und zwo Wurzeln, C der Summe aller Produkte aus je drey und drey Wurzeln u. s. f, R aber dem Produkte aus allen Wurzeln gleich.

Sind alle Wurzeln = — a also die Faktoren x + a, x + a, x + a, x + a, u. s. f.; so wird wie im zweyten Falle das Produkt aus zween Faktoren

$= x^2$

$$= x^2 + ax + aa$$
$$\quad + ax \quad \text{oder}$$
$$= x^2 + 2ax + a^2$$

jenes aus drey Faktoren

$$= a^3 + ax^2 + aax + aaa$$
$$\quad + ax^2 + aax$$
$$\quad + ax^2 + aax \quad \text{oder}$$
$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

jenes aus vier Faktoren

$$= x^4 + ax^3 + aax^2 + aaax + aaaa$$
$$\quad + ax^3 + aax^2 + aaax$$
$$\quad + ax^3 + aax^2 + aaax$$
$$\quad + ax^3 + aax^2 + aaax$$
$$\quad + aax^2$$
$$\quad + aax^2 \quad \text{oder}$$
$$= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

Die Anzahl der Produkte aus je zwo und zwo, aus je drey und drey, aus je vier und vier Wurzeln u. s. f. bleibt also für gleiche oder ungleiche Wurzeln immer dieselbe. Enthält aber ein Produkt m gleiche Wurzeln $-a$, also m gleiche Faktoren $x+a$, so wird dasselbe $(x+a)^m$ nach Nro. 57.

$$= x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3x^{m-3} + \ldots$$

Sind also m Buchstaben a, b, c, d, u. s. f; so ist die Anzahl der Produkte

aus je zween und zween

$$= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$$

aus je drey und drey

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

aus je vier und vier

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \text{ u. s. f.}$$

Stellen die Buchstaben die Numern der Lotterie vor; so wird für die Numern, welche gezogen werden können m = 90 also die Anzahl der Ambi

$$= \frac{90 \times 89}{2} = 4005,$$

und die Anzahl der Terni

$$= \frac{90 \times 89 \times 88}{2 \times 3} = 117480$$

Für die Numern, welche jedesmal wirklich gezogen werden, ist m = 5 also die Anzahl der Ambi

$$= \frac{5 \times 4}{2} = 10,$$

und die Anzahl der Terni

$$= \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 3} = 10.$$

Sollte also dieses Spiel auf ein beederseits gleiches Glücksspiel gebracht werden; so müßte die Lotterie für jeden gewonnenen Ambo $399\frac{1}{2}$ mal, und für jeden gewonnenen Terno 11747 mal den Satz bezahlen.

Weil R das Produkt aus allen Wurzeln ist; so kann eine unmögliche Größe $\sqrt{-a}$ nur paarweise eine Wurzel des möglichen Produktes
$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + R$

seyn

seyn. Denn nur je zwo und zwo unmögliche Größen $\sqrt{-a}$ und $\sqrt{-a}$ können ein mögliches Produkt $-a$ geben.

Weil A die Summe aller Wurzeln ist, und nur gleiche bejahende und verneinende Größen einander aufheben; so kann jede unmögliche Größe $\sqrt{-a}$ nur paarweise und mit entgegengesetzter Bezeichnung eine Wurzel des möglichen Produktes
$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + R$
werden.

Ist also m eine ungerade Zahl; so muß das Produkt allzeit wenigstens eine mögliche Wurzel haben.

Da ferner $(+\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = -(-a) = +a$ allzeit bejahend ist; so muß das mögliche Produkt $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + R$ für ein gerades m und verneinendes R wenigstens zwo mögliche Wurzeln haben.

Weil eine unmögliche Größe $\sqrt{-a}$ mit entgegengesetzter Bezeichnung in sich selbst multiplicirt allzeit ein bejahendes Produkt giebt; so kann obige Regel von den Abwechslungen oder Folgen der Zeichen + und — nur auf Gleichungen von lauter möglichen Wurzeln passen.

Da endlich A die Summe aller Wurzeln ist; so wird A also auch $Ax^{m-1} = 0$; so bald die Summe der bejahenden der Summe der verneinenden Wurzeln gleich ist.

Setzet man 1tens $x = ny$

oder 2tens $x = \frac{y}{n}$;

so erhält man anstatt der Gleichung
$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + R = 0$

1tens
$n^m y^m + An^{m-1} y^{m-1} + Bn^{m-2} y^{m-2} + Cn^{m-3} y^{m-3} + . + R = 0$
also, durch n^m dividirt,

y^m

$$y^m + \frac{Ay^{m-1}}{n} + \frac{By^{m-2}}{n^2} + \frac{Cy^{m-3}}{n^3} + \ldots + \frac{R}{n^m} = 0.$$

2tens

$$\frac{y^m}{n^m} + \frac{Ay^{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{By^{m-2}}{n^{m-2}} + \frac{Cy^{m-3}}{n^{m-3}} + \ldots + R = 0$$

also, durch n^m multiplicirt,

$$y^m + Any^{m-1} + Bn^2y^{m-2} + Cn^3y^{m-3} + \ldots + n^mR = 0$$

Nachdem man also eine Gleichung

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + R = 0$$

durch eine Progression

$$1 + n + n^2 + n^3 + \ldots + n^m$$

Glied für Glied dividirt, odrr multiplicirt; so werden alle Wurzeln der Gleichung im ersten Falle durch n dividirt, und im zweyten durch n multiplicirt.

Ist die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

und man multiplicirt oder dividirt Glied für Glied durch die Progression

$$1 + 2 + 4 + 8,$$

so erhält man im ersten Falle

$$x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$$

und im zweyten Falle

$$x^3 - 3x^2 + \frac{11x}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind 1, 2, 3
jene der zweyten 2, 4, 6
und jene der dritten $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$

Nimmt man für n durch Beyhilfe des Nro. 111 Rechenk. die kleinste Zahl an, welche so beschaffen ist, daß sich die Glieder der Progression

$$1 + n + n^2 + n^3 + \ldots + n^m$$

durch die Nenner der entsprechenden Glieder der Gleichung theilen lassen, und multiplicirt die Wurzeln der

Gleichung durch n; so erhält man dadurch die einfacheste Gleichung, welche von den Brüchen befreyt ist.

Ist die Gleichung $x^3 - \frac{11x^2}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{48} = 0$
und man multiplicirt ihre Wurzeln durch 12, also Glied für Glied durch

$$1 + 12 + 12^2 + 12^3;$$

so erhält man

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$$

die Wurzeln der ersten sind $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$
und jene der zwoten $6, 3, 2$

Ist die Gleichung $x^3 * - \frac{19x}{36} + \frac{5}{36} = 0$
in der das Sternchen * das zweyte Glied, welches $= 0$ ist, ausdrückt, und man multiplicirt ihre Wurzeln durch 6, also Glied für Glied durch

$$1, + 6 + 6^2 + 6^3,$$

so erhält man

$$x^3 * - 19x + 30 = 0$$

die Wurzeln der ersten sind $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, - \frac{5}{6}$
und jene der zwoten $3, 2, - 5.$

Eben so kann auch zuweilen eine Gleichung von einer Wurzelgröße befreyt werden, wenn man die Wurzelgröße selbst für n annimmt, und die Wurzeln der Gleichung dadurch multiplicirt oder dividirt.

Ist die Gleichung $x^3 - x^2\sqrt{2} - x + \sqrt{2} = 0$
und man multiplicirt oder dividirt ihre Wurzeln durch $\sqrt{2}$ oder Glied für Glied durch

$$1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2},$$

so erhält man im ersten Falle

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

und im zweyten Falle

$$x^3 - x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Die

Die Wurzeln der ersten sind $1, \ -1, \ \frac{\sqrt{2}}{2}$
jene der zwoten $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2$
und jene der dritten $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, +1.$

Setzet man $x = y + p$
so wird nach Nro. 57.

1tens. $x^m = y^m + mpy^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} p^2 y^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} p^3 y^{m-3} + \ldots + p^m$

2tens. $Ax^{m-1} = Ay^{m-1} + (m-1)Apy^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ap^2 y^{m-3} + \ldots + Ap^{m-1}$

3tens. $Bx^{m-2} = By^{m-2} + (m-2)Bpy^{m-3} + \ldots + Bp^{m-2}$

4tens. $Cx^{m-3} = Cy^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Cp^{m-3}$

Diese Werthe von x^m, Ax^{m-1} Bx^{m-2} u. s. f.
in die Gleichung
$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + R = 0$
gesetzet, geben:

$$y^m + (mp+A)y^{m-1} + \left[\frac{m(m-1)}{2} p^2 + (m-1)Ap + B\right] y^{m-2}$$
$$+ \left[\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} p^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ap^2 + (m-2)Bp + C\right] y^{m-3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ p^m + Ap^{m-1} + Bp^{m-2} + Cp^{m-3} + \ldots + R = 0$$

Nachdem nun p bejahend oder verneinend ist; so wird jede Wurzel y dieser neuen Gleichung um p kleiner oder größer als jede Wurzel x der gegebenen Gleichung.

Ist die Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 38x + 168 = 0$$

und ihre Wurzeln sollen um 4 kleiner oder um 4 grö-ßer werden; so ist

$m = 3$, $A = -5$, $B = -38$ und $R = 168$.

Daher erhält man im ersten Falle für $p = 4$

$$y^3 + 7y^2 - 30y * = 0$$

und im zweyten Falle für $p = -4$

$$y^3 - 17y^2 + 50y + 176 = 0$$

Die Wurzeln der ersten sind	4, − 6, 7
jene der zwoten	0, − 10, 3
und jene der dritten	8, − 2, 11.

Weil das letzte Glied der gesuchten allgemeinen Gleichung

$p^m + Ap^{m-1} + Bp^{m-2} + Cp^{m-3} + \ldots + R$ ist;

so wird dieses gefunden, wenn man für $x = p$ den Werth des Produktes

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + R$

suchet.

Ist die gegebene Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 38x + 168 = 0;$$

so wird das letzte Glied der Gleichung, deren Wurzeln um 3 kleiner sind,

$$= 27 - 45 - 114 + 168 = 36$$

und deren Wurzeln um 3 größer sind,

$$= -27 - 45 + 114 + 168 = 210.$$

Da das zweyte Glied der gesuchten allgemeinen Gleichung $(mp+A)y^{m-1}$ ist; so wird dieses Glied $= 0$, wenn

$$mp + A = 0 \quad \text{oder}$$

$$p = -\frac{A}{m} \text{ ist.}$$

Nimmt

Nimmt man also $p = -\frac{A}{m}$; so giebt die allgemeine Formel eine Gleichung, die kein zweytes Glied mehr hat, und deren Wurzeln, nachdem A verneinend oder bejahend ist, um $\frac{A}{m}$ kleiner oder größer, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Ist die gegebene Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 38x + 168 = 0$$

so wird $p = \frac{5}{3}$, also die nach der allgemeinen Formel gesuchte Gleichung

$$y^3 * - 46\frac{1}{3}y + 95\frac{11}{27} = 0$$

Die Wurzel der ersten sind $4, - 6, 7$

jene der zwoten $\frac{7}{3}, - \frac{23}{3}, \frac{16}{3},$

Ist p ein kleiner Bruch und man vernachläßigt, um nur eine Annäherung zu erhalten, p^2, p^3, p^4 u. s. f.; so wird die gesuchte allgemeine Gleichung

$$y^m + (mp + A)y^{m-1} + [(m-1)Ap + B]y^{m-2} + [(m-2)Bp + C]y^{m-3} + \ . \ . \ + R = 0.$$

Folglich

$$p = \frac{-y^m - Ay^{m-1} - By^{m-2} - Cy^{m-3} - R}{my^{m-1} + (m-1)Ay^{m-2} + (m-2)By^{m-3} + ..}$$

und, wenn man in der Gleichung

$$x = y + p$$

anstatt p seinen Werth setzet, und y unter gleiche Benennung bringt,

$$x = \frac{my^m + (m-1)Ay^{m-1} + (m-2)By^{m-2} + ..}{my^{m-1} + (m-1)Ay^{m-2} + (m-2)By^{m-3} + ..} - \frac{y^m - Ay^{m-1} - By^{m-2} - Cy^{m-3} - R}{my^{m-1} + (m-1)Ay^{m-2} + (m-2)By^{m-3} + ..}$$

Oder endlich

x =

$$x = \frac{(m-1)y^m + (m-2)Ay^{m-1} + (m-3)By^{m-2} + \ldots - R}{my^{m-1} + (m-1)Ay^{m-2} + (m-2)By^{m-3} + \ldots\ldots} \quad \text{I.}$$

Weiß man z. B. daß von dieser Gleichung

$$x^3 * - 46\tfrac{1}{3}\,x + 95\tfrac{1}{27} = 0$$

eine Wurzel x zwischen 2 und 3 liegt, und man setzet $y = 2$; so wird nach der Näherungsformel I

$$x = \frac{16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 95{,}40}{12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 46{,}33} = \frac{79{,}40}{34{,}33}$$

$= 2,\ 31.$

Und setzet man wieder $y = 2,\ 31$; so erhält man nach derselben Formel

$$x = \frac{24{,}65 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 95{,}40}{16{,}00 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 46{,}33} = \frac{70{,}75}{30{,}33}$$

$= 2,\ 33$ sehr nahe, indem $x = 2\tfrac{1}{3}$ ist.

Von der Auflösung der höheren Gleichungen.

59. Bringt man alle Wurzelgrößen einer gegebenen Gleichung allein auf eine Seite des Gleichungszeichen, und erhebt beyde Glieder zu den Potenzen von den nämlichen Exponenten, welche die Würzelgrößen haben; so wird die Gleichung von den Wurzelgrößen befreyt, und kann sofort nach den bekannten Rechnungsarten allzeit folgende Gestalt erhalten.

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + R = 0$$

Setzet man sodann anstatt x nacheinander die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, u. s. f; und — 1, — 2, — 3, — 4, u. s. f; so sind die rationalen Wurzeln diejenigen aus diesen Zahlen, welche der Gleichung ein Genügen thun: Die irrationalen Wurzeln aber liegen allzeit zwischen denjenigen aus diesen Zahlen, welche anstatt x gesetzt Produkte geben, die ohne = 0 zu werden 0 am nächsten kommen. Dieses geschieht, so oft diese Produkte ohne = 0 zu werden ihre Bezeichnung ändern, oder sich nur gegen 0 nähern

und ohne ihre Bezeichnung zu ändern wieder davon entfernen.

So wird die nächstkleinere ganze Zahl von jeder irrationalen Wurzel bekannt, und sodann diese durch Näherung gefunden; wenn man die nächstkleinere ganze Zahl = y setzet, und nach der Formel I Nro 58 noch x suchet.

Die unmöglichen Wurzeln, können eben darum, weil sie unmöglich sind, weder zwischen den bejahenden noch zwischen den verneinenden Zahlen liegen, also auch nach dieser Methode nie ausfindig gemacht werden.

Ist z. B. die Gleichung

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$$

so wird das Produkt

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36$$

für x = 0, ... = − 36
für x = 1, ... = − 10
für x = 2, ... = 0
für x = 3, ... = 0
für x = 4, ... = − 4
für x = 5, ... = − 6
für x = 6, ... = 0

Daher sind die Wurzeln dieser Gleichung 2, 3, 6.

Ist die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 7x + 6 = 0;$$

so hat sie nach Nro 58 zwo bejahende und eine verneinende Wurzel, wenn keine unmöglich ist.

Nun wird das Produkt

$$x^3 - 3x^2 - 7x + 6$$

für

für x = 0. . . . . = + 6
für x = 1. . . . . = − 3
für x = 2. . . . . = − 12
für x = 3 . . . . = − 15
für x = 4. . . . . = − 6
für x = 5. . . . . = + 21

für x = − 1. . . . . = + 9
für x = − 2. . . . . = 0

Die rationale Wurzel ist also − 2, eine irrationale liegt zwischen 0 und 1 und die andere zwischen 4 und 5.

Weil das Produkt − 3 viel näher bey 0 ist als das Produkt + 6; so ist auch die erste irrationale Wurzel näher bey 1 als bey 0. Setzet man daher $y = \frac{1}{2}$; so wird nach der Formel 1. Nro. 58.

$$x = \frac{0{,}25 - 0{,}75 - 6}{0{,}75 - 3{,}00 - 7{,}00} = \frac{6{,}50}{9{,}25}$$

= 0,71 schon sehr nahe.

Für die zwote ist y = 4, also

$$x = \frac{128 - 48 - 6}{48 - 24 - 7} = \frac{74}{17} = 4{,}35$$

beynahe. Und setzet man wieder y = 4,35; so wird

$$x = \frac{164{,}62 - 56{,}76 - 6}{56{,}76 - 26{,}10 - 7} = \frac{101{,}86}{23{,}66}$$

= 4,30 sehr nahe.

Wenn man von einer Gleichung des mten Grades (m−2) Wurzeln a, b, c, u. s. f. kennet; so findet man allemal auch die zwo letzteren, wenn man das Produkt durch die schon bekannten Faktoren x − a, x − b, x − c, u. s. f. dividiret, den letzten Quotienten = 0 setzet und wie Nro. 173 Rechenk. verfährt.

Weil von der vorigen Gleichung eine Wurzel — 2 ist; so wird

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 7x + 6}{x + 2} = x^2 - 5x + 3,$$

also

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$
$$x^2 = 5x - 3$$
$$x = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - 3}$$
$$x = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{13}$$
$$x = 2{,}5 \pm 1{,}8$$
$$x = 4{,}3 \text{ und}$$
$$x = 0{,}7$$

Weil das letzte Glied R der allgemeinen Formel das Produkt aus allen Wurzeln der Gleichung ist; so werden die rationalen Wurzeln schon gefunden, wenn man von diesem letzten Gliede alle Theiler suchet, und die obigen Versuche nur mit diesen bejahenden und verneinenden Theilern anstellet.

Ist die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 7x + 6 = 0;$$

so sind die Theiler des letzten Gliedes 1, 2, 3, 6; woraus — 2 der Gleichung ein Genügen thut.

Hat das letzte Glied der gegebenen Gleichung sehr viel Theiler, und man sucht nach Nro. 58 das letzte Glied einer Gleichung, deren Wurzeln um eine Zahl p kleiner als jene der gegebenen Gleichung sind, indem man p so annimmt, daß das gesuchte letzte Glied nur wenige Theiler hat; so darf man die Versuche auch nur mit den Zahlen, welche um p größer als diese bejahenden und verneinenden Theiler sind, anstellen.

Ist die Gleichung

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$$

so

so wird das letzte Glied der Gleichung, deren Wurzeln um 4 kleiner sind, $= - 4$, dessen Theiler 1, 2, 4 sind.

Daher hat man auch nur die Versuche mit den Zahlen

$$\begin{array}{r} 1 + 4 = 5 \\ 2 + 4 = 6 \\ 4 + 4 = 8 \\ -1 + 4 = 3 \\ -2 + 4 = 2 \\ -4 + 4 = 0 \end{array}$$

zu machen, woraus 6, 3 und 2 ein Genügen thun.

Ist die Gleichung

$$x^3 + \frac{11x^2}{12} - \frac{5x}{24} - \frac{1}{4} = 0;$$

und man multiplicirt ihrer Wurzeln durch 12 oder Glied für Glied durch die Progression

$$1 + 12 + 12^2 + 12^3;$$

so erhält man

$$x^3 + 11x^2 - 30x - 432 = 0.$$

Sodann wird das letzte Glied der Gleichung, deren Wurzeln um 5 kleiner sind $= - 182$; seine Theiler sind, 1, 2, 7, 13, 14, 26, 91, 182; und die Zahlen, welche der zwoten Gleichung ein Genügen thun,

$$\begin{array}{r} 1 + 5 = 6 \\ -13 + 5 = -8 \text{ und} \\ -14 + 5 = -9 \end{array}$$

also die Wurzeln der gegebenen Gleichung $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$.

Von der Differenzialrechnung.

---

60. Das unendlichkleine Wachsthum einer veränderlichen Größe z. B. einer Ordinate y oder einer Abscisse x wird das **Differenziale** derselben genennt.

Man drücket das Differenziale dadurch aus, daß man der Veränderlichen y oder x den Buchstabe d vorsetzet.

So bedeutet dx oder dy nichts anders, als das Differenziale von x oder y.

Jeder Ausdruck, welcher eine Veränderliche x auf was immer für eine Art enthält, wird eine **Funktion** von x genennt. So heißt axy eine Funktion von x oder von y.

Das Differenziale einer Funktion ist das unendlichkleine Wachsthum, welches sie erhält, indem ihre Veränderlichen x, y, z um dx, dy, dz wachsen.

Man findet also jedesmal das Differenziale einer gegebenen Funktion, wenn man in derselben $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ anstatt x, y, z setzet, und sodann von dieser so veränderten Funktion noch die gegebene abzieht.

Wenn daher x um dx und y um dy wächst; so wächst das Produkt xy um

$(x+dx)(y+dy) - xy$, also ist

$d(xy) = xy + ydx + xdy + dydx - xy$

$d(xy) = ydx + xdy + dydx$

also nach Nro. 53

$d(xy) = ydx + xdy$

und eben so

d(xyz)

$$d(xyz) = xydz + z \cdot d(xy)$$
$$= xydz + yzdx + xzdy$$
$$d(xyzu) = xyzdu + u \cdot d(xyz)$$
$$= xyzdu + xyudz + xzudy + yzudx$$

Man erhält also das Differenziale eines Produktes, wenn man das Differenziale eines jeden Faktors mit allen übrigen Faktoren multiplicirt und noch alle diese Produkte zusammen addirt.

Ist ein Faktor beständig; so ist sein Differenziale $= 0$, also auch das Produkt aus seinem Differenziale in die übrigen Faktoren $= 0$. Daher wird

$$d(ax) = adx + x \times 0 = adx.$$

Nach voriger Regel ist ferner

$$d(x^2) = d(xx) = xdx + xdx = 2xdx$$
$$d(x^3) = d(x^2 . x) = 2x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$$
$$d(x^4) = d(x^3 . x) = 3x^3dx + x^3dx = 4x^3dx$$
$$d(x^5) = 5x^4dx \text{ und}$$
$$d(x^m) = mx^{m-1}dx.$$

Man erhält also das Differenziale einer Potenz, wenn man ihren Exponenten in die nächstkleinere Potenz und in das Differenziale der Veränderlichen multiplicirt.

Ist die gegebene Funktion ein Bruch, oder eine Wurzelgröße; so übersetzet man den veränderlichen Nenner in den Zähler nach Nro. 148 Rechenk., oder verwandelt den Exponenten der Wurzel in einen gebrochenen der Potenz nach Nro. 150 Rechenk. und verfährt nach vorigen Regeln. So ist

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy$$

$$= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

$$d\left(\frac{ax^2}{y^3}\right) = d(ax^2y^{-3}) = 2ay^{-3}xdx$$

$$- 3ax^2y^{-4}dy = \frac{2ayxdx - 3ax^2dy}{y^4}$$

$$d\left(\frac{ax^m}{y^n}\right) = d(ax^my^{-n}) = may^{-n}x^{m-1}dx$$

$$- nax^my^{-n-1}dy = \frac{mayx^{m-1}dx - nax^mdy}{y^{n+1}}$$

$$d\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = d(x^{\frac{2}{3}}) = \tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$d\left(\sqrt[m]{x^n}\right) = d\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx$$

$$= \frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx = \frac{n}{m}\sqrt[m]{x^{m-n}}dx$$

Endlich ist das Differenziale einer mehrtheiligen Funktion der Summe der Differenzialen ihrer Theile gleich.

Daher ist ferner

$$d(x+y-z) = dx + dy - dz$$

$$d(xy + ax + ab) = xdy + ydx + adx$$

$$d(ax - xx) = adx - 2xdx$$

$$d(ax^2+bxy) = 2axdx + bxdy + bydx$$

$$d\left(ax^2 - \frac{by^4}{x^2}\right) = d(ax^2 - by^4x^{-2})$$

$$= 2axdx + 2by^4x^{-3}dx - 4bx^{-2}y^3dy$$

$$d(bx^2 + y^3)^5 = 5(bx^2 + y^3)^4(2bxdx$$

+

$$+ 3y^2dy) = (10bxdx + 15y^2dy)(bx^2+y^3)^4.$$

$$d[x^3\sqrt[3]{(a+bx^4)^2}] = d[x^3(a+bx^4)^{\frac{2}{3}}]$$

$$= 3x^2dx(a+bx^4)^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}x^3(a+bx^4)^{-\frac{1}{3}}.\,4bx^3dx$$

$$= 3x^2dx\sqrt[3]{(a+bx^4)^2} + \frac{8bx^6dx}{3\sqrt[3]{a+bx^4}}$$

$$d\left(\frac{(x^2+a^2)^3}{(b-y)^2}\right) = d[(x^2+a^2)^3(b-y)^{-2}]$$

$$= 3(x^2+a^2)^2(b-y)^{-2}.\,2xdx - 2(b-y)^{-3}.$$

$$(x^2+a^2)^3.\,-dy = \frac{6xdx(x^2+a^2)^2}{(b-y)^2} + \frac{2dy(x^2+a^2)^3}{(b-y)^3}$$

Von den zweyten, dritten und höheren Differenzialen.

61. Da die Funktionen der veränderlichen Größen nicht gleichfort wachsen; so müssen auch die Differenzialen der Funktionen bey gleichem Wachsthume der Veränderlichen selbst veränderlich seyn und wachsen oder abnehmen.

Wenn x um dx wächst; so wächst ax^m um $max^{m-1}dx$: und dieses ist das erste Differenziale der Funktion ax^m.

Nun fragt man um was eben dieses erste Differenziale $max^{m-1}dx$ wachse, da x wieder um dx wächst?

Um dieses zu finden muß man nach der allgemeinen Regel in $max^{m-1}dx$ anstatt x wieder $x+dx$ setzen, und sodann von der so veränderten Funktion noch $max^{m-1}dx$ abziehen.

So wird das 2te Differenziale von ax^m,
$d(max^{m-1}dx) = madx(x+dx)^{m-1} - max^{m-1}dx$, und, wenn man (x+dx) nach der ersten Formel Nro. 57 zur (m−1)ten Potenz erhebt,

$$d(max^{m-1}dx) = madx[x^{m-1}$$

$$+ (m-1)x^{m-2}dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \;.\; 2} x^{m-3}dx^2 +$$

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3} x^{m-4}dx^3 + ..] - max^{m-1}dx$$

$$= max^{m-1}dx + m(m-1)ax^{m-2}dx^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \;.\; 2} ax^{m-3}dx^3 +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3} ax^{m-4}dx^4 + .. - max^{m-1}dx$$

$$= m(m-1)ax^{m-2}dx^2 + \frac{m(m-1)\;(m-2)}{1 \;.\; 2} ax^{m-3}dx^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3} ax^{m-4}dx^4 + \ldots\ldots$$

Folglich nach Nro. 53.

$$d(max^{m-1}dx) = m(m-1)ax^{m-2}dx^2.$$

Setzet man in diesem zweyten Differenziale $m(m-1)ax^{m-2}dx^2$ anstatt x wieder $x+dx$, und zieht sodann $m(m-1)ax^{m-2}dx^2$ davon ab; so erhält man nach derselben Methode das 3te Differenziale von ax^m $d[m(m-1)ax^{m-2}dx^2] = m(m-1)(m-2)ax^{m-3}dx^3$.

Man erhält also jedes höhere Differenziale, wenn man das nächstniedrigere Differenzirt, indem man dabey das Differenziale der Veränderlichen als beständig ansieht.

Die zweyten Differenzialen werden durch ddx oder d^2x, die dritten durch dddx oder d^3x u. s. f. angezeiget.

Für die Parabel ist

$$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}, \text{ also}$$

dy

$$dy = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$d^2y = -\frac{1}{4} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^2$$

$$d^3y = +\frac{3}{8} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{5}{2}} dx^3 \text{ u. s. f.}$$

Für den Kreis ist $y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, also

$$dy = \left(\frac{adx}{2} - xdx\right)(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$d^2y = -dx^2(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{adx}{2} - xdx\right)^2 (ax - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left[-dx^2(ax - x^2) - \left(\frac{adx}{2} - xdx\right)^2\right](ax - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{a^2dx^2}{4}(ax - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Wenn von einer Funktion, welche mehrere Veränderlichen x, y, z enthält, ein höheres Differenziale verlangt wird; so müssen die Umstände der Aufgabe jedesmal bestimmen, von welcher Veränderlichen das erste Differenziale als beständig angenommen werden soll.

So wird, wenn dx beständig ist,

$$d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d(dxdy^{-1}) = -dxdy^{-2}d^2y$$

$= \frac{dxddy}{dy^2}$; und wenn dy beständig ist,

$$d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{ddx}{dy}.$$

Eben so ist $dd(axy) = d(axdy + aydx)$, also,

wenn dx beständig ist,

$= adxdy + axddy + adydx$

$= 2adxdy + axd^2y$,

und, wenn dy beständig ist,

$= adxdy + adydx + ayddx$

$= 2adxdy + ayd^2x$.

Von

Von dem Differenziale der Trigonometrischen Funktionen.

62. Wenn z jeden Bogen oder Winkel bedeutet; so ist nach Nro. 60.

$$d(\text{Sin } z) = \text{Sin } (z+dz) - \text{Sin } z$$

also aus 19 Nro. 50.

$$= \text{Sin } z \text{ Kos } dz + \text{Sin } dz \text{ Kos } z - \text{Sin } z$$

Nun weil der Kosinus eines unendkleinen Bogens dem Halbmesser und der Sinus desselben dem Bogen selbst gleich ist; so wird

$$\text{Kos } dz = 1 \text{ und Sin } dz = dz,$$

also

$$d(\text{Sin } z) = \text{Sin } z + dz \text{ Kos } z - \text{Sin } z$$

oder

1. $$d(\text{Sin } z) = dz \text{ Kos } z$$

Eben so ist

$$d[\text{Sin } (90^\circ - z)] = d(90^\circ - z) \text{ Kos } (90^\circ - z)$$

Es ist aber, $\text{Sin } (90^\circ - z) = \text{Kos } z$,

$d(90^\circ - z) = - dz$,

und $\text{Kos } (90^\circ - z) = \text{Sin } z$

also wird

2. $$d(\text{Kos } z) = - dz \text{ Sin } z$$

Ferner ist aus 1 Nro. 50.

$$d(\text{Tang } z) = d\left(\frac{\text{Sin } z}{\text{Kos } z}\right) = d(\text{Sin } z \text{ Kos}^{-1} z)$$

$$= dz \text{ Kos } z \text{ Kos}^{-1} z - \text{Sin } z \text{ Kos}^{-2} z. - dz \text{ Sin } z$$

$$= \frac{dz \text{ Kos } z}{\text{Kos } z} + \frac{dz \text{ Sin}^2 z}{\text{Kos}^2 z}$$

$$= \frac{dz \text{ Kos}^2 z + dz \text{ Sin}^2 z}{\text{Kos}^2 z}$$

Es ist aber aus 7 Nro. 50

$$\text{Kos}^2\ z + \text{Sin}^2\ z = 1,\ \text{also}$$

$$d(\text{Tang}\ z) = \frac{dz}{\text{Kos}^2\ z}. \qquad 3.$$

Eben so ist

$$d[\text{Tang}\ (90^\circ - z)] = \frac{d(90^\circ - z)}{\text{Kos}^2\ (90^\circ - z)}$$

Es ist aber $\text{Tang}\ (90^\circ - z) = \text{Kot}\ z$

$$d(90^\circ - z) = -\ dz$$

und $\text{Kos}^2\ (90^\circ - z) = \text{Sin}^2\ z$

also

$$d(\text{Kot}\ z) = -\frac{dz}{\text{Sin}^2\ z}. \qquad 4.$$

Aus 2 Nro. 50 wird

$$d(\text{Sek}\ z) = d\left(\frac{1}{\text{Kos}\ z}\right) = d(\text{Kos}^{-1}\ z)$$

$$= -\ \text{Kos}^{-2}\ z. -\ dz\ \text{Sin}\ z = dz\ \text{Sin}\ z\ \text{Kos}^{-2}\ z$$

also

$$d(\text{Sek}\ z) = \frac{dz\ \text{Sin}\ z}{\text{Kos}^2\ z}. \qquad 5.$$

Eben so wird aus 4 Nro. 50

$$d(\text{Kosk}\ z) = d\left(\frac{1}{\text{Sin}\ z}\right) = d(\text{Sin}^{-1}\ z)$$

$$= -\ \text{Sin}^{-2}\ z . dz\ \text{Kos}\ z = -\ dz\ \text{Kos}\ z\ \text{Sin}^{-2}\ z$$

also

$$d(\text{Kosk}\ z) = -\frac{dz\ \text{Kos}\ z}{\text{Sin}^2\ z} \qquad 6.$$

Endlich wird aus 9 Nro. 50.

$d(\text{Osin}\ z) = d(1 - \text{Kos}\ z)$ oder

$d(\text{Osin}\ z) = dz\ \text{Sin}\ z$ 7.

und aus 10 Nro. 50

$d(\text{Okos}\ z) = d(1 - \text{Sin}\ z)$ oder

$d(\text{Okos}\ z) = -\ dz\ \text{Kos}\ z$ 8.

Nach

Nach diesen Formeln kann nun jeder Ausdruck, welcher trigonometrische Funktionen enthält, Differenzirt werden. So wird

$$d(\mathrm{Sin}^m\, x) = m\, \mathrm{Sin}^{m-1}\, x\, dx\, \mathrm{Kos}\, x$$

$$= m\, \mathrm{Sin}^m\, x \frac{dx\, \mathrm{Kos}\, x}{\mathrm{Sin}\, x} = m\, \mathrm{Sin}^m\, x dx\, \mathrm{Kot}\, x$$

$$d(\mathrm{Kos}\, mx) = -\, mdx\, \mathrm{Sin}\, mx$$

$$d(\mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Kos}\, x) = \mathrm{Kos}\, x . dx\, \mathrm{Kos}\, x$$

$$+ \mathrm{Sin}\, x . - dx\, \mathrm{Sin}\, x$$

$$= dx\, \mathrm{Kos}^2\, x - dx\, \mathrm{Sin}^2\, x.$$

Von dem Differenziale der Kreisbögen.

63. Sucht man aus den 8 Formeln Nro 62 dz das Differenziale des Bogens z, und verwandelt sodann jeden Werth von dz nach Nro. 50 dergestalt, daß jeder Werth von dz nur eine und dieselbe Funktion enthält; so wird aus 1 Nro 62. und aus 7 Nro 50

1tens $dz = \frac{d(\mathrm{Sin}\, z)}{\mathrm{Kos}\, z} = \frac{d(\mathrm{Sin}\, z)}{\sqrt{1 - \mathrm{Sin}^2\, z}}$

aus 2 Nro 62 und 7 Nro 50.

2tens $dz = - \frac{d(\mathrm{Kos}\, z)}{\mathrm{Sin}\, z} = - \frac{d(\mathrm{Kos}\, z)}{\sqrt{1 - \mathrm{Kos}^2\, z}}$

aus 3 Nro 62 und 11 Nro 50

3tens $dz = \mathrm{Kos}^2\, z\, d(\mathrm{Tang}\, z) = \frac{d(\mathrm{Tang}\, z)}{1 + \mathrm{Tang}^2\, z}$

aus 4 Nro 62 und 12 Nro 50

4tens $dz = -\, \mathrm{Sin}^2\, z\, d(\mathrm{Kot}\, z) = - \frac{d(\mathrm{Kot}\, z)}{1 + \mathrm{Kot}^2 z}$

aus 5 Nro 62 und 13 Nro 50

5tens $dz = \frac{\mathrm{Kos}^2\, z\, d(\mathrm{Sek}\, z)}{\mathrm{Sin}\, z} = \frac{d(\mathrm{Sek}\, z)}{\mathrm{Sek}\, z \sqrt{\mathrm{Sek}^2 z - 1}}$

aus 6 Nro 62 und 14 Nro 50

6tens

6tens $dz = -\frac{\text{Sin}^2 z\, d(\text{Kosk}\, z)}{\text{Kos}\, z} = -\frac{d(\text{Kosk}\, z)}{\text{Kosk}\, z\sqrt{\text{Kosk}^2 z - 1}}$

aus 7 Nro 62 und 15 Nro 50

7tens $dz = \frac{d(\text{Osin}\, z)}{\text{Sin}\, z} = \frac{d(\text{Osin}\, z)}{\sqrt{2\,\text{Osin}\, z - \text{Osin}^2 z}}$

aus 8 Nro 62 und 16 Nro 50

8tens $dz = -\frac{d(\text{Okos}\, z)}{\text{Kos}\, z} = -\frac{d(\text{Okos}\, z)}{\sqrt{2\text{Okos}\, z - \text{Okos}^2 z}}$

Heißt nun jede trigonometrische Funktion x; so wird ihr Differenziale dx, dz aber das Differenziale des Bogens z von eben dieser Funktion x, folglich aus vorigen Formeln je nachdem x ein Sinus, ein Kosinus, eine Tangente u. s. f. bedeutet:

$d(\text{Bog Sin}\, x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 1.

$d(\text{Bog Kos}\, x) = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 2.

$d(\text{Bog Tang}\, x) = \frac{dx}{1 + x^2} = dx(1 + x^2)^{-1}$ 3.

$d(\text{Bog Kot}\, x) = -\frac{dx}{1 + x^2} = -dx(1 + x^2)^{-1}$ 4.

$d(\text{Bog Sek}\, x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = x^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ 5.

$d(\text{Bog Kosk}\, x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -x^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ 6.

$d(\text{Bog Osin}\, x) = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = dx(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 7.

$= x^{-\frac{1}{2}}dx(2 - x)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1}dx(2x^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

8. $d(\text{Bog Okos}\,x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -dx(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= -x^{-\frac{1}{2}}dx(2 - x)^{-\frac{1}{2}} = -x^{-1}dx(2x^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}.$

Nach diesen 8 Formeln kann man nun jeden Ausdruck, welcher Bögen von trigonometrischen Funktionen enthält, differenziren. So wird ferner:

$$d[\tfrac{1}{2}x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\text{Bog Sin}\,x]$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}x^2dx + \frac{1}{2}dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}dx(1 - x^2)}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

9. $d[\tfrac{1}{2}x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\text{Bog Sin}\,x] = dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$

$$d[\tfrac{1}{2}\text{Bog Kos}\,x - \tfrac{1}{2}x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}x^2dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}x^2dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}dx(1 - x^2)}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

10. $d[\tfrac{1}{2}\text{Bog Kos}\,x - \tfrac{1}{2}x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}] = -dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$

$$d[\tfrac{1}{2}\,\text{Bog Sin}\,(1-x) + \tfrac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}dx}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}dx(1-x)^2}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}dx[1-(1-x)^2]}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}dx(2x-x^2)}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

$$d[\tfrac{1}{2}\,\text{Bog Sin}\,(1-x) + \tfrac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}] \qquad \text{II.}$$

$$= -dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} = -x^{\frac{1}{2}}dx(2-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -xdx(2x^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}.$$

$$d[\tfrac{1}{2}\,\text{Bog Kos}\,(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}dx}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}dx(1-x)^2}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}dx[1-(1-x)^2]}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}dx(2x-x^2)}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

12. $d[\frac{1}{2}$ Bog Kos $(1 - x) - \frac{1}{2}(1 - x)(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}]$

$= dx(2x - x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} dx(2 - x)^{\frac{1}{2}}$

$= xdx(2x^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Endlich

$d(x^m$ Bog Sin $x) = mx^{m-1} dx$ Bog Sin x

$+ \frac{x^m dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

d Bog Tang $(b^2 + x^2) = \frac{2xdx}{1 + (b^2 + x^2)^2}$

$= \frac{2xdx}{1 + b^4 + 2b^2 x^2 + x^4}$.

Von dem Differenziale der Logarithmen.

64. Nach Nro. 60 ist,

$d \log x = \log(x + dx) - \log x$

$= \log\left(\frac{x + dx}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$

also aus 5 Nro 56.

$= \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \frac{dx^4}{4x^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

folglich nach Nro 53.

1. $d \log x = \frac{dx}{x} = x^{-1} dx$.

Eben

Eben daher wird

$$d\,\frac{1}{b}\log\left(\frac{x}{x\pm b}\right)=\frac{x\pm b}{bx}\cdot d\left[x\,(x\pm b)^{-1}\right]$$

$$=\frac{x\pm b}{bx}\cdot\left[dx(x\pm b)^{-1}-xdx(x\pm b)^{-2}\right]$$

$$=\frac{1}{bx}\left(\frac{dx(x\pm b)}{x\pm b}-\frac{xdx}{(x\pm b)}\right)$$

$$=\frac{dx}{x}\left(\frac{x\pm b-x}{b(x\pm b)}\right)\text{, oder}$$

$$d\,\frac{1}{b}\log\left(\frac{x}{x\pm b}\right)=\pm\frac{dx}{x^2\pm bx}. \qquad 2.$$

$$d\,\frac{1}{b}\log\left(\frac{b\pm x}{x}\right)=\frac{x}{b(b\pm x)}\cdot d\left[x^{-1}(b\pm x)\right]$$

$$=\frac{x}{b(b\pm x)}\left(-\frac{dx(b\pm x)}{x^2}\pm\frac{dx}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{b(b\pm x)}\left(\frac{-dx(b\pm x)\pm xdx}{x}\right)$$

$$=\frac{-bdx\mp xdx\pm xdx}{b(bx\pm x^2)}\text{, oder}$$

$$d\,\frac{1}{b}\log\left(\frac{b\pm x}{x}\right)=-\frac{dx}{bx\pm x^2} \qquad 3.$$

$$d\,\frac{1}{2b}\log\left(\frac{x-b}{x+b}\right)=\frac{x+b}{2b(x-b)}\cdot d(x-b)(x+b)^{-1}$$

$$=\frac{x+b}{2b(x-b)}\left(\frac{dx}{x+b}-\frac{dx(x-b)}{(x+b)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2b(x-b)}\left(\frac{dx(x+b) - dx(x-b)}{x+b}\right)$$

$$= \frac{dx(x+b-x+b)}{2b(x-b)(x+b)}, \text{ oder}$$

4. $$d\,\frac{1}{2b}\log\left(\frac{x-b}{x+b}\right) = \frac{dx}{x^2-b^2}.$$

$$d\,\frac{1}{2b}\log\left(\frac{b+x}{b-x}\right) = \frac{b-x}{2b(b+x)}.\,d(b+x)(b-x)^{-1}$$

$$= \frac{b-x}{2b(b+x)}\left(\frac{dx}{b-x} + \frac{dx(b+x)}{(b-x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2b(b+x)}\left(\frac{dx(b-x) + dx(b+x)}{b-x}\right)$$

$$= \frac{dx(b-x+b+x)}{2b(b+x)(b-x)}, \text{ oder}$$

5. $$d\,\frac{1}{2b}\log\left(\frac{b+x}{b-x}\right) = \frac{dx}{b^2-x^2}.$$

$$d\,\frac{1}{b}\log\left(\frac{b+(b^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right)$$

$$= d\,\frac{1}{b}\log x^{-1}\left[b+(b^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{-x^{-2}dx - \frac{1}{b}x^{-2}dx(b^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{dx}{b}\left(b^2\pm x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{x^{-1}\left[b+(b^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$= \frac{-x^{-1}dx - \frac{1}{b}x^{-1}dx(b^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{xdx}{b}\left(b^2\pm x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{b+(b^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

=

$$= \frac{-x^{-1}dx(b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}} - bx^{-1}dx \mp \frac{xdx}{b} \pm \frac{xdx}{b}}{(b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}[b + (b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}]}$$

$$= \frac{-x^{-1}dx - bx^{-1}dx(b^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}}}{b + (b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-x^{-1}dx(b^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}}[b + (b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}]}{b + (b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

also

$$d\frac{1}{b}\log\left[\frac{b + (b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right] = -\frac{dx}{x(b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}}. \qquad 6.$$

$$d\log[x + (x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{dx + xdx(x^2 \pm b^2)^{-\frac{1}{2}}}{x + (x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} + xdx}{(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}[x + (x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}]}, \text{ oder}$$

$$d\log[x + (x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{dx}{(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}}. \qquad 7.$$

$$d\tfrac{1}{2}x(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{2}b^2 \log[x + (x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^2dx(x^2 \pm b^2)^{-\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{2}b^2dx(x^2 \pm b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm b^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2 \pm b^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

$$d\tfrac{1}{2}x(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{2}b^2 \log[x + (x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}] \qquad 8.$$

$$= dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$d\log\left[x \pm \tfrac{1}{2}b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{dx + (xdx \pm \tfrac{1}{2}bdx)(x^2 \pm bx)^{-\frac{1}{2}}}{x \pm \tfrac{1}{2}b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} + xdx \pm \tfrac{1}{2}bdx}{(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}\left[x \pm \tfrac{1}{2}b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

also

9. $d\log\left[x \pm \tfrac{1}{2}b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}\right] = \dfrac{dx}{(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}}.$

$$d\tfrac{1}{4}(2x \pm b)(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}b^2\log\left[x \pm \tfrac{1}{2}b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} + (\tfrac{1}{2}x^2dx \pm \tfrac{1}{2}bxdx + \tfrac{1}{8}b^2dx)$$

$$\times (x^2 \pm bx)^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}b^2dx(x^2 \pm bx)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm bx)(x^2 \pm bx)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

10. $d\tfrac{1}{4}(2x \pm b)(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}b^2\log\left[x \pm \tfrac{1}{2}b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}\right]$

$$= dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner wird

$$d\log(xy) = d(\log x + \log y) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{ydx + xdy}{xy}.$$

$$d \log \left(\frac{x}{y}\right) = d(\log x - \log y) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{ydx - xdy}{xy}$$

$$d \log (x^n) = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = \frac{ndx}{x}.$$

$$d \log (\sqrt[n]{x}) = d \log (x^{\frac{1}{n}}) = \frac{dx}{nx}.$$

$$d \log (a^2 - x^2) = d[\log (a + x) + \log (a - x)]$$

$$= \frac{dx}{a+x} - \frac{dx}{a-x} = - \frac{2xdx}{a^2 - x^2}.$$

$$d \log \sqrt{a^2 + x^2} = d \log (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d \tfrac{1}{2} \log (a^2 + x^2) = \frac{xdx}{a^2+x^2}$$

$$d \log (a + bx^n)^q = d\, q \log (a + bx^n)$$

$$= \frac{nbqx^{n-1}dx}{a + bx^n}.$$

Wenn A das Modell eines logarithmischen Systems ist; so giebt das Produkt aus A in den natürlichen Logarithme den Logarithme für das System, folglich giebt auch das Produkt aus A in das Differenziale des natürlichen Logarithme das Differenziale des Logarithme eben dieses Systems.

Für die gemeinen Logarithen ist A = 0.4342945, also

$$d(\text{gem} \log x) = 0.4342945 \times \frac{dx}{x}.$$

Von dem Differenziale der Exponentialgrößen.

65. Man versteht hier unter Exponentialgrößen nur die Potenzen von einem veränderlichen Exponenten, wie

$$a^x,\ x^y,\ x^{(y^z)}.$$

Weil aus 1 Nro 64

$$d \log x = \frac{dx}{x} \text{ ist, so wird}$$

auch $dx = x\, d \log x$; oder

Es ist das Differenziale einer Größe dem Produkte aus der Größe in das Differenziale ihres Logarithme gleich.

So wird

$$d\, a^x = a^x\, d \log a^x = a^x\, d(x \log a)$$

$= a^x dx \log a.$

$$d\, x^y = x^y\, d \log x^y = x^y\, d(y \log x)$$

$$= x^y \left(dy \log x + \frac{ydx}{x}\right).$$

$$d\, x^{(y^z)} = x^{(y^z)}\, d(y^z \log x)$$

$$= x^{(y^z)} \left(\frac{y^z dx}{x} + \log x\, d\, y^z\right)$$

$$= x^{(y^z)} \left(\frac{y^z dx}{x} + y^z \log x \left(dz \log y + \frac{zdy}{y}\right)\right.$$

$$= x^{(y^z)}\, y^z \left(\frac{dx}{x} + dz \log x \log y + \frac{zdy \log x}{y}\right)$$

Ist b die Grundzahl der Logarithmen; so wird $\log b = 1$.

als,

also, $d\,b^x = b^x\,d(\log b^x) = b^x\,d(x \log b)$
$= b^x dx.$ und

$$d\,b^{(b^x)} = b^{(b^x)}\,d(b^x \log b) = b^{(b^x)}\,db^x$$

$$= b^{(b^x)}\,b^x dx.$$

Anwendung.

66. **Es sey für jede Krumme 02 die Subtangente 13, die Subnormal 37, die Tangente 12 und die Normal 27 zu bestimmen.** Fig. 91.

Wenn x um 35 = dx wächst; und 26 mit 05 gleichläuft; so wird auch 26 = dx und 46 = dy, der unendlichkleine Theil 24 aber der Krummen 02 auch ein Theil der Tangente 12.

Daher verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 462 und 231,

$$dy : dx = y : 13$$

Folglich wird jede

$$\text{Subt } 13 = \frac{ydx}{dy}. \qquad 1.$$

Sodann verhält sich wegen des bey 2 rechtwinklichten Dreyeckes 127,

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : 37$$

Daher wird jede

$$\text{Subn } 37 = \frac{ydy}{dx}. \qquad 2.$$

Ferner ist wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 231,

3. jede Tang 12 $= \sqrt{y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}}$

und wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 237

4. jede Norm 27 $= \sqrt{y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}}$

Sucht man nun aus der gegebenen Gleichung den Werth von dy oder dx, und setzet diesen Werth in die obigen allgemeinen Formeln; so erhält man jedesmal die verlangten Geraden.

Für die Parabel ist

$$y^2 = px$$

$$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \tfrac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$dy^2 = \tfrac{1}{4} px^{-1} dx^2, \text{ also wird}$$

$$\text{Subt } 13 = \frac{ydx}{dy} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}{\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx} = 2x.$$

$$\text{Subn } 37 = \frac{ydy}{dx} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx}{dx} = \frac{p}{2}$$

$$\text{Tang } 12 = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}}$$

$$= \sqrt{px + \frac{pxdx^2}{\frac{1}{4}px^{-1}dx^2}} = \sqrt{px + 4x^2}$$

also x : Tang 12 = Tang 12 : p + 4x.

$$\text{Norm } 27 = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}}$$

$$= \sqrt{px + \frac{px \cdot \frac{1}{4}px^{-1}dx^2}{dx^2}} = \sqrt{px + \frac{pp}{4}}.$$

also $p : \text{Norm } 27 = \text{Norm } 27 : x + \frac{p}{4}.$

Für den Kreis ist

$$yy = ax - xx$$

$$y = (ax - xx)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \left(\frac{a}{2} - x\right) dx(ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$$

$$dy^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 dx^2(ax - x^2)^{-1}$$

also wird

$$\text{Subt } 13 = \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}dx}{\left(\frac{a}{2} - x\right)dx(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{ax-x^2}{\frac{a}{2}-x}$$

$$\text{Subn } 37 = \frac{ydy}{dx}$$

$$= \frac{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2} - x\right)dx(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{a}{2}-x.$$

Tang

$$\text{Tang } 12 = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}}$$

$$= \sqrt{ax - xx + \frac{(ax - xx)dx^2}{\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 dx^2 (ax - x^2)^{-1}}}$$

$$= \sqrt{ax - x^2 + \frac{(ax - x^2)^2}{\left(\frac{a}{2} - x\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^3x - a^2x^2}}{a - 2x}.$$

$$\text{Norm } 27 = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}}$$

$$= \sqrt{ax - x^2 + \frac{(ax - x^2)\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 dx^2 (ax - x^2)^{-1}}{dx^2}}$$

$$= \sqrt{ax - x^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}$$

$$= \sqrt{ax - x^2 + \frac{aa}{4} - ax + x^2} = \frac{a}{2}.$$

Für die Elipse ist

$$yy = px - \frac{pxx}{a}$$

$$y = \left(\frac{apx - px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \left(\frac{ap - 2px}{2a}\right) dx \left(\frac{apx - px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

als

also wird

$$\text{Subtang } 13 = \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{apx - px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\left(\frac{ap - 2px}{2a}\right) dx \left(\frac{apx - px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{ax - x^2}{\frac{a}{2} - x}.$$

$$\text{Subn } 37 = \frac{ydy}{dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{apx-px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ap - 2px}{2a}\right) dx \left(\frac{apx - px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$= \frac{p\left(\frac{a}{2} - x\right)}{a}.$$

Für die Hyperbel ist

$$yy = px + \frac{px^2}{a}$$

$$y = \left(\frac{apx + px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \left(\frac{ap + 2px}{2a}\right) dx \left(\frac{apx + px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

al-

also wird

$$\text{Subtang } 13 = \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{apx + px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\left(\frac{ap + 2px}{2a}\right) dx \left(\frac{apx + px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{ax + x^2}{\frac{a}{2} + x}$$

$$\text{Subnorm } 37 = \frac{ydy}{dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{apx+px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ap+2px}{2a}\right) dx \left(\frac{apx+px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$= \frac{p\left(\frac{a}{2} + x\right)}{a}.$$

Für die Parabel vom (m + n)ten Grade ist

$$y^{m+n} = p^m x^n$$

$$y = p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}}$$

$$dy = \frac{n}{m+n} \cdot p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n} - 1} dx$$

als

also wird

$$\text{Subtang } 13 = \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}} \cdot dx}{\frac{n}{m+n} \cdot p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}-1} \cdot dx} = \frac{m+n}{n} x.$$

$$\text{Subnorm } 37 = \frac{ydy}{dx}$$

$$= \frac{p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}-1} \cdot dx}{dx}$$

$$= \frac{n}{m+n} \cdot p^{\frac{2m}{m+n}} \cdot x^{\frac{2n}{m+n}-1}$$

Wenn die Abscissen von dem Mittelpunkte an gerechnet werden; so nimmt y im Kreise und in der Elipse ab, da x wächst.

In solchem Falle muß also der aus der Gleichung gesuchte Werth von dy allzeit mit entgegengesetzter Bezeichnung genommen werden.

Für den Kreis ist

$$yy = \frac{aa}{4} - xx$$

$$y = \left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = xdx \left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{-\frac{1}{2}}$$

also

also wird

$$\text{Subtang } 13 = \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}} dx}{xdx\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{aa}{4} - xx}{x}$$

$$\text{Subnorm } 37 = \frac{ydy}{dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}} xdx\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = x.$$

Für die Elipse ist

$$yy = \frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}$$

$$y = \left(\frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{bbxdx}{aa}\left(\frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

also wird

$$\text{Subtang } 13 = \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\frac{bbxdx}{aa}\left(\frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{aa}{4} - xx}{x}.$$

Subnorm 37 $= \frac{ydy}{dx}$

$$= \frac{\left(\frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{bbxdx}{aa} \left(\frac{bb}{4} - \frac{bbxx}{aa}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$= \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{a}.$$

Für die Hyperbel zur ersten oder zwoten Achse ist

$$yy = \frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}$$

$$y = \left(\frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{bbxdx}{aa} \left(\frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

also wird

Subtang 13 $= \frac{ydx}{dy}$

$$= \frac{\left(\frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\frac{bbxdx}{aa} \left(\frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{xx \mp \frac{aa}{4}}{x}$$

Subnorm 37 $= \frac{ydy}{dx}$

$$= \frac{\left(\frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{bbxdx}{aa} \left(\frac{bbxx}{aa} \mp \frac{bb}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$= \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{a}.$$

Für die Hyperbel an den Assymptoten ist

$$xy = aa$$

$$y = a^2 x^{-1}$$

und, weil y abnimmt da x wächst,

$$dy = a^2 x^{-2} dx$$

also wird

$$\text{Subtang} = \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{a^2 x^{-1} dx}{a^2 x^{-2} dx} = x.$$

Für die Hyperbel an den Assymptoten vom mten Grade ist

$$y^m = a^{m+n} x^{-n}$$

$$y = a^{\frac{m+n}{m}} \cdot x^{-\frac{n}{m}}$$

$$dy = \frac{n}{m} \cdot a^{\frac{m+n}{m}} \cdot x^{-\frac{n}{m}-1} \cdot dx$$

also wird

$$\text{Subtang}\ \frac{ydx}{dy}$$

$$= \frac{a^{\frac{m+n}{m}} \cdot x^{-\frac{n}{m}} \cdot dx}{\frac{n}{m} a^{\frac{m+n}{m}} \cdot x^{-\frac{n}{m}-1} \cdot dx} = \frac{m}{n} x.$$

Von

Von der Methode das Größte oder Kleinste zu bestimmen.

67. Nachdem eine veränderliche Funktion anfänglich wächst am größten wird und sodann abnimmt, muß nothwendig ihr Wachsthum anfänglich bejahend seyn, = 0 werden und sodann ins Verneinende übergehen.

Und nachdem eine Funktion anfänglich abnimmt am kleinsten wird und so dann wächst, muß ihr Wachsthum anfänglich verneinend seyn, = 0 werden und sodann ins Bejahende übergehen.

Setzet man daher das Differenziale einer Funktion = 0; so drückt diese Gleichung den Fall aus in welchem die Funktion am größten oder am kleinsten ist, und giebt für die Veränderliche einen Werth, welcher anstatt ihr in die Funktion gesetzt für diese das Größte oder das Kleinste bestimmt, je nachdem der um etwas größere und um etwas kleinere Werth der Veränderlichen in die Funktion gesetzt, beydesmal etwas kleiners oder beydesmal etwas größers giebt.

Die Summe zweyer Faktoren sey a, man suche ihr größtes Produkt.

Wenn der eine Faktor x ist; so wird der andere a — x, und ihr Produkt ax — xx; folglich ist für das größte Produkt

$$adx - 2xdx = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \text{ und}$$

das größte Produkt

$$ax - xx = \frac{aa}{4}.$$

Denn ist $x = \frac{a}{2} \pm q$; so wird $ax - xx = \frac{aa}{4} - qq$ allzeit kleiner als $\frac{aa}{4}$.

Fig. 92. Man soll in dem Halbkreise 879 das größte Rechteck 2345 zeichen.

Ist 89 = a und 15 = x; so wird 45 = $\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}}$, und der Inhalt des Rechteckes 2345 $= 2x\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}}$, also für das größte Rechteck

$$2dx\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}} - 2x^2dx\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{xx}{\left(\frac{aa}{4} - xx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$xx = \frac{aa}{4} - xx$$

$$xx = \frac{aa}{8}, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{2} : x = x : \frac{a}{4}, \text{ und}$$

das größte Rechteck

$$2x\sqrt{\frac{aa}{4} - xx} = 2\sqrt{\frac{aa}{8}} \cdot \sqrt{\frac{aa}{8}} = 2\sqrt{\frac{a^4}{64}} = \frac{aa}{4}.$$

Denn ist $xx = \frac{aa}{8} \pm qq$; so wird in beeden Fällen das Rechteck

$$2x\sqrt{\frac{aa}{4} - xx} = 2\sqrt{\frac{aa}{8} + qq} \cdot \sqrt{\frac{aa}{8} - qq}$$

$= 2\sqrt{\frac{a^4}{64} - q^4}$, allzeit kleiner

als $2\sqrt{\frac{a^4}{64}}$, oder $\frac{aa}{4}$.

Zieht man also nach der gefundenen Proportion

$$\frac{a}{2} : x = x : \frac{a}{4}$$

17 senkrecht auf 89 und nimmt 16 $= \frac{a}{4}$; so wird der auf 67 beschriebene Halbkreis die Unbekannte $x = 15$ bestimmen.

Man führe durch einen inner dem Winkel 012 gegebenen Punkt 3 die Gerade 02, welche das kleinste Dreyeck 012 abschneide. Fig. 93.

Zieht man 34 gleichlaufend mit 01, 05 und 36 senkrecht auf 12, und setzt $14 = a$, $36 = b$ und $12 = x$; so verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 234 und 201.

$$24 : 36 = 21 : 05, \text{ oder}$$

$$x - a : b = x : 05$$

folglich wird $05 = \frac{bx}{x-a}$, und

das Dreyeck $012 = \frac{bxx}{2(x-a)}$.

Also ist für das kleinste Dreyeck

$$d\left(\frac{bxx}{2(x-a)}\right) = 0,$$

 oder,

oder, weil ein beständiger Faktor $\frac{b}{2}$ zur Bestimmung des Größten oder Kleinsten nichts beytragen kann,

$$d\left(\frac{xx}{x-a}\right) = 0$$

$$d[xx(x-a)^{-1}] = 0$$

$$2xdx(x-a)^{-1} - xxdx(x-a)^{-2} = 0$$

$$\frac{2}{x-a} - \frac{x}{(x-a)^2} = 0$$

$$2 - \frac{x}{x-a} = 0$$

$$2x - 2a - x = 0$$

$x = 2a$, und das größte Dreyeck

$\frac{bxx}{2x - 2a} = 2ab.$

Denn ist $x = 2a \pm q$; so wird

$$\frac{xx}{x-a} = \frac{4aa \pm 4aq + qq}{a \pm q} = 4a + \frac{qq}{a \pm q}$$

und $\frac{b}{2} \cdot \frac{xx}{x-a} = 2ab + \frac{bqq}{2a \pm 2q}$, allzeit größer als 2ab.

Fig. 94. Es sey auf der Grundlinie $23 = a$ für dieselbe Summe der Seiten das größte Dreyeck 123 zu zeichnen.

Setzet man 14 sey die Höhe des verlangten Dreyeckes 123, $24 = x$ und $14 = y$; so wird $12 = (xx + yy)^{\frac{1}{2}}$,

$$34 = [(a-x)^2 + yy]^{\frac{1}{2}}$$

die

die Summe der Seiten

$= (xx + yy)^{\frac{1}{2}} + [(a - x)^2 + yy]^{\frac{1}{2}} + a$ und

der Inhalt des Dreyeckes $= \frac{ay}{2}$.

Nun weil die Summe der Seiten beständig seyn soll; so ist ihr Differenziale $= 0$, also

$$\frac{xdx + ydy}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(a - x)dx + ydy}{[(a - x)^2 + yy]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

und weil das Dreyeck $\frac{ay}{2}$ ein größtes seyn soll,

$$\frac{ady}{2} = 0, \text{ oder}$$

$$dy = 0; \text{ folglich}$$

$$\frac{xdx}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(a - x)dx}{[(a-x)^2 + yy]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$x[(a-x)^2+yy]^{\frac{1}{2}} - (a-x)(xx+yy)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$xx(a-x)^2+xxyy - (a-x)^2(xx+yy) = 0$$

$$xx(a-x)^2 + xxyy = xx(a-x)^2 + yy(a-x)^2$$

$$xxyy = yy(a-x)^2$$

$$xx = aa - 2ax + xx$$

$$2ax = aa$$

$$x = \frac{a}{2}.$$

Für dieselbe Summe der drey Seiten ist also das größte Dreyeck, wenn zwo Seiten unbestimmt sind, gleichschenklicht; und ebendaher, wenn alle drey Seiten unbestimmt sind, gleichseitig.

Die Summe von 3 Zahlen sey a, man soll ihr größtes Produkt bestimmen.

Ist der erste Faktor x und der zweyte y, so wird der dritte a — x — y, und ihr Produkt

$$axy - xxy - xyy.$$

Setzet man nun x allein veränderlich; so wird für das größte Produkt

$$aydx - 2xydx - yydx = 0.$$

Und setzet man y allein veränderlich; so wird für das größe Produkt

$$axdy - xxdy - 2xydy = 0.$$

Da nun sowohl y als x veränderlich ist; so müssen diese beeden Gleichungen, um nicht eine Bedingung wegzulassen, in die Rechnung gebracht werden.

Eben dieses erhält man auch, wenn man den zusammengesetzten Ausdruck, welcher mehrere Veränderlichen enthält, differenzirt, und sodann die Summe der Ausdrücke, welche dx enthalten, so wie die Summe jener, welche dy enthalten, besonders = 0 setzet.

Diesem nach ist

$$d(axy - x^2y - xy^2)$$

$$= aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx$$

folglich 1tens

$$aydx - 2xydx - y^2dx = 0$$

und 2tens

$$axdy - x^2dy - 2xydy = 0$$

wie zuvor.

Aus der ersten Gleichung wird

$$a - 2x - y = 0$$

$$x = \frac{a-y}{2}$$

und aus der zwoten

$$a - x - 2y = 0$$

$$x = a - 2y, \text{ also}$$

$$a - 2y = \frac{a-y}{2}$$

$$2a - 4y = a - y$$

$$y = \frac{a}{3} \text{ und}$$

$$x = a - 2y = \frac{a}{3}$$

und das größte Produkt

$$axy - x^2y - xy^2 = \frac{a^3}{27}.$$

Soll das Produkt aus dem Würfel x^3 des ersten Theiles in das Quadrat y^2 des zweyten und in den dritten Theil $a - x - y$ der Zahl a ein größtes seyn; so ist das Produkt

$$ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3,$$

sein Differenziale

$$3ax^2y^2dx + 2ax^3ydy - 4x^3y^2dx$$
$$-2x^4ydy - 3x^2y^3dx - 3x^3y^2dy,$$

also 1tens

$$3ax^2y^2dx - 4x^3y^2dx - 3x^2y^3dx = 0$$

und 2tens

$$2ax^3ydy - 2x^4ydy - 3x^3y^2dy = 0$$

also aus der ersten Gleichung

$$3a - 4x - 3y = 0$$

$$x = \frac{3a - 3y}{4}$$

und aus der zwoten Gleichung

$$2a - 2x - 3y = 0$$

$$x = \frac{2a - 3y}{2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{3a - 3y}{4} = \frac{2a - 3y}{2}$$

$$3a - 3y = 4a - 6y$$

$$y = \frac{a}{3}$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$a - x - y = \frac{a}{6},$$

und das größte Produkt

$$ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 = \frac{a^6}{432}.$$

Es sey das größte rechte Parallelepiped für dieselbe Summe der 6 Rechtecke, welche dasselbe einschliessen zu bestimmen.

Wenn seine Höhe $= z$, eine Seite der Grundfläche $= x$ und die andere $= y$ ist; so wird die gesammte Oberfläche

$$= 2xy + 2xz + 2yz,$$

folglich, weil diese Oberfläche beständig ist,

$$2xdy + 2ydx + 2zdx + 2xdz + 2zdy + 2ydz = 0,$$

und,

und, weil der körperliche Inhalt xyz ein größtes seyn soll,

$$xydz + xzdy + yzdx = 0$$

$$dz = -\frac{xzdy - yzdx}{xy}$$

$$dz = \frac{-zdy}{y} - \frac{zdx}{x}.$$

Dieser Werth anstatt dz in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$2xdy + 2ydx + 2zdx + 2zdy - \frac{2xzdy}{y}$$

$$- 2zdx - 2zdy - \frac{2yzdx}{x} = 0$$

oder

$$2xdy + 2ydx - \frac{2xzdy}{y} - \frac{2yzdx}{x} = 0$$

also 1tens

$$2ydx - \frac{2yzdx}{x} = 0$$

und 2tens

$$2xdy - \frac{2xzdy}{y} = 0$$

aus der ersten Gleichung wird

$$x = z$$

und aus der zwoten

$$z = y.$$

Unter allen Parallelepipeden von derselben Oberfläche ist also der Würfel das größte; und unter allen gleichen Parallelepipeden hat der Würfel die kleinste Oberfläche.

Es sey für dieselbe Oberfläche der größte rechte Cylinder zu bestimmen.

Ist der Durchmesser der Grundfläche $= x$, die Höhe des Cylinders $= y$ und das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange $= r : c$; so ist die Oberfläche

$\frac{cxy}{r} + \frac{cxx}{2r}$ eine beständige Größe,

also $\frac{cxdy}{r} + \frac{cydx}{r} + \frac{cxdx}{r} = 0$

oder

$$xdy + ydx + xdx = 0$$

und der körperliche Inhalt

$\frac{cx^2y}{4r}$ ein Größtes, also

$$d\left(\frac{cx^2y}{4r}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$d(x^2y) = 0$$

$$2xydx + x^2dy = 0$$

$$dy = -\frac{2ydx}{x}$$

Dieser Werth anstatt dy in die obige Gleichung gesetzt giebt

$$-2ydx + ydx + xdx = 0$$

$$x = y.$$

Wenn also die Höhe eines rechten Cylinders dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist; so ist dieser Cylinder der größte unter allen von derselben Oberfläche, und hat unter allen ihm gleichen Cylindern die kleinste Oberfläche.

Eine Funktion ist am größten oder am kleinsten ebenda, wo ihr Differenziale seine Bezeichnung ändert. Grös-

sen

sen aber ändern ihre Bezeichnung nicht nur wenn sie durch 0, sondern auch wenn sie durchs Unendliche gehen.

So wächst die Tangente eines Bogens (Nro 383. Meßk.) von 0 Grade an, bis sie bey 90° unendlichgroß und sodann verneinend, bey 180° unendlichklein = 0 und sodann bejahend, bey 270° unendlichgroß und sodann verneinend, bey 360° unendlichklein = 0 und sodann wieder bejahend wird u. s. f.

Und eben so wächst die Entfernung des Samlungspunktes der durch eine Glaslinse gebrochenen Lichtstrale (Nro 338) wird unendlichgroß und sodann verneinend, jenachdem der leuchtende Punkt sich des Glases Brennpunkte nähert, mit diesem zusammentrifft und sodann zwischen den Brennpunkt und die Linse tritt.

Da nun das unendlichkleine der ersten Ordnung in Ansehung des Endlichen und Unendlichkleinen der zwoten Ordnung ebendas, was das Endliche in Ansehung des Unendlichgroßen und Unendlichkleinen der ersten Ordnung ist; so muß auch das Differenziale einer Funktion, ein Unendlichkleines der ersten Ordnung, seine Bezeichnung ändern, wenn dasselbe durchs Unendlichkleine der zwoten Ordnung oder durchs Endliche, also in Ansehung seiner Ordnung durch 0 oder durchs Unendliche geht.

Wenn also das Differenziale einer Funktion ein Bruch ist, und dieser Bruch = 0 gesetzt das Größte oder Kleinste der Funktion nicht bestimmt; so muß derselbe noch unendlichgroß, oder, welches einerley ist, der Nenner desselben = 0 gesetzet werden; und dann erst, wenn auch diese Gleichung nichts bestimmt, kann man schliessen, daß die gegebene Funktion keines Größten oder Kleinsten fähig ist.

Von

Von dem Krümmungshalbmesser.

Fig. 95. 68. Es berühre die Tangente 04 die Krumme 4, 5, 10 in dem Punkte 4, und ein Faden, welcher in 10 befestiget über die Krumme 54 herläufft und bis in 0 reichet, werde immer gleichgespannt von der Krummen 4, 5, 10 dergestalt abgelöset, daß dessen Ende 0 eine Krumme 02 beschreibe; so heißt 02 die **Abwicklende** von 45, 45 die **Abgewickelte** von 02, und der Aufgelößte Faden 25 der **Krümmungshalbmesser** für den Punkt 2 der Krummen 02.

Da für einen unendlichkleinen Bogen 21 sich der Faden 25 um nichts ablöset; so kann man setzen, es sey dieser Bogen 21 aus einem Punkte 5 mit dem Halbmesser 52 beschrieben.

Zieht man nun 28 und 19 senkrecht auf 04, sodann 23 und 57 gleichlaufend mit 04 und setzt 08 = x, 82 = y, 02 = z und 72 = u; so wird, indem man 21 = dz als einen Theil der Tangente 2,11 ansieht, wegen des rechtwinklichten Dreyeckes 132,

$$dz^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dz = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

und, wenn dx beständig bleibt,

$$ddz = \frac{dyddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ferner verhält sich wegen der ähnlichen Dreyecke 123 und 257

$$dx : dz = u : 25;$$

folglich ist $25 = \frac{udz}{dx}$

Es

Es ist aber $25 = 15$ also das Differenziale von $25 = 0$, folglich auch

$$d\left(\frac{udz}{dx}\right) = 0$$

oder, wenn dx beständig bleibt,

$$\frac{dudz + uddz}{dx} = 0$$

$$dudz + uddz = 0$$

oder, weil $du = dy$ ist,

$$dydz + uddz = 0, \text{ und}$$

$$u = -\frac{dydz}{ddz};$$

dieser Werth anstatt u gesetzt giebt

$$25 = -\frac{dydz^2}{dxddz}$$

anstatt dz^2 und ddz ihre obigen Werthe gesetzt, giebt

$$25 = -\frac{dy(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dxdyddy}$$

oder endlich

$$25 = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}.$$

Welche allgemeine Formel dx für beständig voraus setzet.

Aus 4 Nro 66 ist für jede Krumme

die Normal $n = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}}$

oder

$$\text{oder } n = \frac{y}{dx}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$n^3 = \frac{y^3}{dx^3}(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}, \text{folglich}$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{n^3 dx^3}{y^3} \text{ und}$$

$$2s = -\frac{n^3 dx^2}{y^3 ddy}.$$

Welche Formel abermal dx für beständig voraussetzt.

Z. B. Für die Kegelschnitte ist allgemein

$$y = \left(px + \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y^3 = \left(px \pm \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$dy = dx\left(\frac{p}{2} \pm \frac{px}{a}\right)\left(px \pm \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

und, weil die allgemeine Formel dx als beständig voraussetzt,

$$ddy = dx\left[\frac{\pm\frac{pdx}{a}}{\left(px \pm \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(\frac{p}{2} + \frac{px}{a}\right)\left(-\frac{pdx}{2} \mp \frac{pxdx}{a}\right)}{\left(px \pm \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{dx^2}{\left(px \pm \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\pm\frac{p}{a}\left(px \pm \frac{px^2}{a}\right) + \left(\frac{p}{2} + \frac{px}{a}\right)\left(-\frac{p}{2} \mp \frac{px}{a}\right)\right] =$$

$$= \frac{dx^2}{\left(px \pm \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\pm \frac{p^2x}{a} + \frac{p^2x^2}{a^2} - \frac{1}{4}p^2 \mp \frac{p^2x}{a} - \frac{p^2x^2}{a^2} \right) \text{ also}$$

$$ddy = - \frac{\frac{1}{4}p^2dx^2}{\left(px \pm \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Setzet man nun die Werthe von y^3 und ddy in die allgemeine Formel; so wird für jeden Kegelschnitt der Krümmungshalbmesser $25 = - \frac{n^3dx^2}{y^3ddy} = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$.

Für den Kreis ist allzeit $n = \frac{a}{2}$ und $a = p$, also $25 = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{\frac{1}{8}a^3}{\frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{2}$, also die Abgewickelte des Kreises ein Punkt.

Für die Parabel ist $n = \sqrt{px + \frac{pp}{4}}$, also, für $x = 0$, $n = \frac{p}{2}$ und $25 = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{\frac{1}{8}p^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{p}{2}$.

Für die Hyperbel und Elipse ist

$$yy = \frac{apx \pm px^2}{a}$$

$$y = \left(\frac{apx \pm px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = dx\left(\frac{ap \pm 2px}{2a}\right)\left(\frac{apx \pm px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$dy^2 = dx^2\left(\frac{ap \pm 2px}{2a}\right)^2\left(\frac{apx \pm px^2}{a}\right)^{-1}$$

also $n = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}}$

$$= \sqrt{\frac{apx \pm px^2}{a} + \left(\frac{ap \pm 2px}{2a}\right)^2}$$

folglich, für $x = 0$, $n = \frac{1}{2}p$.

Die Parabel, Hyperbel und Elipse haben also am Scheitel die nämliche Krümmung als ein mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}p$ beschriebener Kreis hat.

Von dem Werthe der Brüche, deren Zähler und Nenner = 0 sind.

69. Es ist $P + d(P) : Q + d(Q)$

$= \frac{P}{Q + d(Q)} + \frac{d(P)}{Q + d(Q)}$, also nach Nro. 53

$$P + d(P) : Q + d(Q) = \frac{P}{Q}, \text{ oder}$$

$\frac{P}{Q} = \frac{P + d(P)}{Q + dQ}$ und in dem Falle,

in welchem P und $Q = 0$ werdrn,

$$\frac{P}{Q} = \frac{0 + d(P)}{0 + d(Q)} = \frac{d(P)}{d(Q)}$$

Jeder Bruch wird also in dem Falle, in welchem Zähler und Nenner = 0 sind, dem Differenziale des Zählers dividirt durch das Differenziale des Nenners gleich.

So wird

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{0}{0}, \text{ wenn } x = a \text{ ist,}$$

also in diesem Falle

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{2xdx}{dx} = 2x = 2a$$

wie es klar ist. Denn es ist

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a,$$

also $= 2a$, im Falle $x = a$ ist.

Für die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression, deren erstes Glied a, der Nenner x und die Anzahl der Glieder n ist, wird (Nro. 237 Rechenk.) die Summe aller Glieder

$$S = \frac{ax^n - a}{x - 1} = \frac{0}{0}, \text{ wenn } x = 1 \text{ ist,}$$

also für eben diesen Fall

$$S = \frac{nax^{n-1}dx}{dx} = na,$$

wie es für sich klar ist; indem für diesen Fall

$S = a + a + a + a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = na$ wird.

Ist das erste Glied der Progression auch $= x$; so wird

$$S = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{0}{0}, \text{ da } x = 1 \text{ ist,}$$

also für diesen Fall

$$S = \frac{(n+1)x^n dx - dx}{dx} = (n+1) - 1$$

$$= n + 1 - 1 = n.$$

Für eben diese Progression ist auch, wenn man im Zähler und Nenner die Zeichen ändert,

$$S = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{0}{0}, \text{ da } x = 1 \text{ ist,}$$

also für eben diesen Fall

$$S = \frac{dx - (n+1)x^n dx}{-dx} = -1 + (n+1) = n$$

wie zu vor.

Weil $\infty - \infty = \frac{a}{0} - \frac{b}{0} = \frac{0}{0}$ ist; so läßt sich auch der Werth von $\infty - \infty$ für jeden besondern Fall nach voriger Methode bestimmen.

So wird $\frac{1}{\log x} - \frac{x}{\log x} = \infty - \infty$, wenn $x = 1$ ist, und für eben diesen Fall nach voriger Methode $\frac{1}{\log x} - \frac{x}{\log x} = \frac{1 - x}{\log x} = - dx : \frac{dx}{x}$

$$= - x = - 1.$$

Von der Methode die Kreisbögen durch Sinuße oder Tangenten und diese durch jene zu bestimmen.

70. Setzet man den Bogen $= z$; so erhält man aus Nro 63 für dz Werthe, welche man nach Nro 57 in unendliche Reihen von der trigonometrischen Funk-

tion x und dx auflösen kann: und setzet man sodann z einer Reihe von den Koefficienten A, B, C, D u. s. f. und den nächstgrößern Potenzen von x gleich; so folgt hieraus für dz noch eine der vorigen ähnliche Reihe. Diese zwo Reihen von dz geben eine Gleichung, welche nach Nro 54 die Koefficienten A, B, C, D u. s. f. folglich auch z durch x bestimmt.

Kehrt man endlich diese letzte Reihe nach Nro 55. um; so wird auch x durch eine Reihe von z gefunden.

Es sey also

$$\text{Bog Sin } x = z$$

so ist aus 1. Nro 63.

$$dz = dx\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

also aus 3. Nro 57

$$dz = dx\,\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\ldots\ldots\right)$$

Und setzet man

$$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots\ldots\ldots$$

so wird auch

$$dz = dx\,(A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots)$$

also

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\ldots\ldots$$
$$= A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots\ldots\ldots$$

oder

$$0 = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots\ldots\ldots$$
$$- 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 - \ldots\ldots$$

$$A - 1 = 0 \text{ und } A = 1$$

$$3B - \frac{1}{2} = 0, \quad B = \frac{1}{2.3}$$

$$5C - \frac{1.3}{2.4} = 0, \quad C = \frac{1.3}{2.4.5}$$

$$7D - \frac{1.3.5}{2.4.6} = 0, \quad D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}$$

folglich

$$1. \quad z = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} +$$

und aus 3. Nro 55.

$$2. \quad x = z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{z^5}{5}$$

$$- \frac{1}{2.3.4.5.6} \cdot \frac{z^7}{7} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Will man anstatt des Halbmessers 1 wieder a setzen; so wird, weil jeder Ausdruck eine Linie seyn muß,

$$z = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3a^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7a^6}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$ und

$$x = z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3a^2} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{z^5}{5a^4}$$

$$- \frac{1}{2.3.4.5.6} \cdot \frac{z^7}{7a^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

da z die Länge eines jeden Bogens, und x sein Sinus bedeutet.

Ist Bog Tang $x = z$; so wird aus 3. Nro 63.

$$dz = dx(1 + x^2)^{-1}$$

also aus 4. Nro 57.

$$dz = dx(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

und

und setzet man

$$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots\ldots\ldots$$

so wird auch

$$dz = dx\,(A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots\ldots)$$

also

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots\ldots\ldots$$

oder

$$0 = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 +$$
$$- 1 + x^2 - x^4 + x^6 - \ldots\ldots\ldots\ldots$$ und

$$A = 1,\; B = -\frac{1}{3},\; C = \frac{1}{5},\; D = -\frac{1}{7},$$

folglich

$$z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

und aus 2. Nro 55.

$$x = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{3.5}\cdot z^5 + \frac{17}{3.3.5.7}\cdot z^7 + \ldots \quad 4.$$

also für den Halbmesser a

$$z = x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{a^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{a^4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{a^6} + \ldots\ldots$$

und

$$x = z + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{a^2} + \frac{2}{3.5}\cdot\frac{z^5}{a^4} + \frac{17}{3.3.5.7}\cdot\frac{z^7}{a^6}$$

da z jeden Bogen, und x seine Tangente bedeutet.

Ist z = Bog 30°; so wird x = Sin 30° $2x$ = Sehne 60° = 1 und $x = \frac{1}{2}$, folglich aus 1.

$$\text{Bog } 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5}$$
$$+ \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \ldots)$$

Entwickelt man 14 Glieder dieser Reihe; so wird

$$\text{Bog } 30^{\circ} = 0.5235987756$$

also

$$\text{Bog } 180^{\circ} = 6 \times 0.5235987756$$

oder der halbe Umfang = 3.1415926536.

Es verhält sich also der Halbmesser zum halben Umfange, oder der Durchmesser zum Umfange wie 1 : 3.1415926536, wie Nro 206 Meßk. angezeigt worden ist.

Hieraus läßt sich einsehen, wie man für den Halbmesser 1 sowohl den Bogen als die trigonometrischen Funktionen von jedem Winkel berechnen konnte. Unter den Tafeln hievon, so wie von den natürlichen Logarithmen, verdienen jene des vortrefflichen Schriftstellers Vega ihrer Richtigkeit wegen besonders empfohlen zu werden.

Von der Integralrechnung.

71. Integriren heißt aus dem gegebenen Differenziale einer Funktion die Funktion finden.

Die gesuchte Funktion wird das **Integrale** des gegebenen Differenzials genennt, und dadurch angezeigt, daß man dem gegebenen Differenziale den Buchstabe S vorsetzet.

So wird

$$S\,dx = x + C \text{ und}$$
$$S\,adx = ax + C$$

indem C jeden beständigen Ausdruck, welcher nach den Bedingungen jeder Aufgabe erst besonders bestimmet werden muß, bedeutet.

Nach Nro 60 erhält man das Integrale eines einzelnen Differenzials, wenn man den Exponenten seiner Veränderlichen um 1 vergrößert, sodann dasselbe durch eben diesen vergrößerten Exponenten und das Differenziale der Veränderlichen dividirt.

So wird

$$S\ 2x\,dx = \frac{2x^2dx}{2dx} = x^2 + C$$

$$S\ x\,dx = \frac{x^2dx}{2dx} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$S\,a\sqrt[3]{x^2}dx = S\ ax^{\frac{2}{3}}dx$$

$$= \frac{ax^{\frac{5}{3}}dx}{\frac{5}{3}dx} = \frac{3}{5}a\sqrt[3]{x^5} + C$$

$$S\ \frac{adx}{x^3} = S\ ax^{-3}dx = \frac{ax^{-2}dx}{-2dx}$$

$$= -\frac{a}{2}x^{-2} = -\frac{a}{2x^2} + C$$

$$S\ ax^m dx = \frac{ax^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \frac{a}{m+n}\cdot x^{m+1} + C.$$

72. Ist der Exponent $m = -1$; so wird

$$S\ ax^{-1}dx = \frac{ax^0dx}{0\times dx} = \frac{a}{0} = \infty.$$

Weil dieses unmöglich seyn kann, sondern aus 1 Nro 64. $S\ ax^{-1}dx. = S\ \frac{adx}{x} = a\log x$ ist;

so kann diese und jede Regel zu integriren nur mit dieser Bedingung, daß man anstatt $\frac{x^0}{0}$ allzeit $\log x$ setze, bestehen.

73. Ist das gegebene Differenziale aus mehrern einzelnen Ausdrücken zusammengesetzet; so integrirt man jeden Theil desselben nach voriger Regel.

So wird

$$S\,ax^3dx + \frac{bx^2dx}{e} + edx + fx^{-1}dx$$

$$= \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3e} + ex + f\log x + C$$

$$S\,ax^2dx + bx^{-4}dx - \frac{x^{-1}dx}{e}$$

$$= \frac{ax^3}{3} - \frac{bx^{-3}}{3} - \frac{\log x}{e}$$

$$= \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{3x^3} - \frac{1}{e}\log x + C$$

74. Enthält das gegebene Differenziale einen mehrtheiligen Ausdruck, dessen Koefficient dividirt durch das Differenziale eben dieses Ausdruckes einen beständigen Quotienten giebt; so kann man den mehrtheiligen Ausdruck selbst als nur eine Veränderliche ansehen und nach Nro 71. verfahren.

Ist z. B. das gegebene Differenziale

$$gdx\,(a+bx)^q;\ \text{so ist}\ \frac{gdx}{bdx} = \frac{g}{b},$$

also

$$S\,gdx(a+bx)^q = \frac{gdx(a+bx)^{q+1}}{(q+1)bdx}$$

$$= \frac{g}{(q+1)b}(a+bx)^{q+1} + C.$$

Ist $gxdx(a + bx^2)^{-3}$ zu integriren;

so ist $\frac{gxdx}{2bxdx} = \frac{g}{2b}$, also

$$S\ gxdx(a+bx^2)^{-3} = \frac{gxdx(a + bx^2)^{-2}}{-2.2bxdx}$$

$$= - \frac{g}{4b}(a+bx^2)^{-2} = - \frac{g}{4b(a+bx^2)^2} + C.$$

Eben so wird

$$S\ 2x^2dx\ (1 - x^3)^{-1} = - \frac{2x^2dx}{3x^2dx} \log (1 - x^3)$$

$$= - \frac{2}{3} \log (1-x^3) + C$$

und

$$S\ (a^2dx + 2axdx)(ax + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a^2dx + 2axdx}{\frac{1}{2}(adx + 2xdx)} (ax + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2a(ax + x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

75. **Enthält das gegebene Differenziale mehrtheilige Ausdrücke, welche nicht in dem vorigen Falle sind, aber ganze bejahende Exponenten haben, so erhebt man die mehrtheiligen Faktoren zu den angezeigten Potenzen, multiplicirt alle ihre Theile mit dem einzelnen Faktor und verfährt abermal nach Nro 71.**

So wird

$$S\ dx(a+bx^2)^3 = S\ dx(a^3+3a^2bx^2$$
$$+ 3ab^2x^4 + b^3x^6) = S\ (a^3dx+3a^2bx^2dx$$
$$+ 3ab^2x^4dx + b^3x^6dx) = a^3x+a^2bx^3$$
$$+ \frac{3}{5} ab^2x^5 + \frac{1}{7} b^3x^7 + C.$$

$S\ 3dx(a-bx^{-\frac{1}{2}})^2 = S\ 3dx(a^2 - 2abx^{-\frac{1}{2}}$
$+ b^2x^{-1}) = S\ (3a^2dx - 6abx^{-\frac{1}{2}}\ dx$
$+ 3b^2x^{-1}dx) = 3a^2x - 12abx^{\frac{1}{2}}$
$+ 3b^2 \log x + C.$

Eben so wird man das Integrale von $gx^3dx(a + bx^2)^2 + a^2x^7dx(c + ex^2 + fx^3)^4$ erhalten, wenn man die zwote Potenz von $(a + bx^2)$ und die vierte von $(c + ex^2 + fx^3)$ suchet, sodann jene mit gx^3dx und diese mit a^2x^7dx multiplicirt und wie zuvor verfährt.

76. Nebst diesen allgemeinen Regeln für die mehrtheiligen Ausdrücke ist noch besonders diese Formel

$$x^n dx(a + bx^m)^q$$

für die zweytheiligen zu untersuchen.

Hat ein gegebenes Differenziale diese Gestalt:

$$x^g dx(ax^r + bx^s)^q$$

und man dividirt den zweytheiligen Faktor $(ax^r + bx^s)^q$ durch x^{rq} und multiplicirt den einzelnen Faktor $x^g dx$ durch eben diese Größe x^{rq}; so wird

$$x^g dx(ax^r + bx^s)^q$$
$$= x^{g+rq}\ dx \frac{(ax^r + bx^s)^q}{x^{rq}} = x^{g+rq}\ dx\left(\frac{ax^r + bx^s}{x^r}\right)^q$$
$$= x^{g+rq}\ dx(a + bx^{s-r})^q$$

Wenn also beede Theile des zweytheiligen Ausdruckes die Veränderliche x enthalten, so wird der eine Theil ax^r von x befreyt; wenn man den Koefficienten $x^g dx$ mit x^{rq} multiplicirt und den zweytheiligen Ausdruck $ax^r + bx^s$ durch x^r dividirt.

Jedes zweytheilige Differenziale hat also diese Gestalt

$$x^n dx(a + bx^m)^q$$

oder kann nach voriger Methode ebendiese Gestalt erhalten.

So wird

$$x^{\frac{5}{2}}dx(a^2x + x^3)^{\frac{1}{2}} = x^3dx(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a^2x^{-1}dx(x^{\frac{4}{3}} + a^2x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}},$$

$$= a^2x^{-3}dx(1 + a^2x^{-2})^{-\frac{3}{2}}$$

77. Dividirt man ferner von diesem Differenziale

$$x^n dx(a + bx^m)^q$$

den zweytheiligen Faktor $(a + bx^m)^q$ durch x^{mq} und multiplicirt den einzelnen Faktor $x^n dx$ durch eben diese Größe x^{mq}; so wird

$$x^n dx(a + bx^m)^q = x^{n+mq}dx\frac{(a + bx^m)^q}{x^{mq}}$$

$$= x^{n+mq}\,dx\left(\frac{a+bx^m}{x^m}\right)^q = x^{n+mq}\,dx(ax^{-m} + b)^q.$$

Multiplicirt man also den einzelnen Faktor durch x^{mq}, und übersetzet die Veränderliche mit entgegengesetzter Bezeichnung ihres Exponenten als einen Faktor aus einem Theile des zweytheiligen Ausdruckes in den andern Theil; so bleibt der Werthe des gegebenen Differenzials derselbe.

So wird

$$a^2dx(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} = a^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$a^2x^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}} = a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$$

78. Sucht man endlich nach Nro 75. das Integrale von $x^ndx(a+bx^m)^q$;

so erhält man aus 5. Nro 57

$$S\,x^ndx(a+bx^m)^q = S\,x^ndx(a^q$$

$$+\frac{q}{1}\cdot a^{q-1}bx^m$$

$$+\frac{q(q-1)}{1\cdot 2}a^{q-2}b^2x^{2m}$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{q-3}b^3x^{3m}$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{q-4}b^4x^{4m}+\ldots\ldots\ldots$$

$$= S\,(a^qx^ndx$$

$$+\frac{q}{1}\cdot a^{q-1}bx^{n+m}dx$$

$$+\frac{q(q-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{q-2}b^2x^{n+2m}dx$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{q-3}b^3x^{n+3m}dx$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{q-4}b^4x^{n+4m}dx$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folg-

Folglich

$$S\,x^n dx(a+bx^m)^q = a^q \cdot \frac{x^{1+n}}{1+n}$$

$$+ \frac{q}{1} \cdot a^{q-1} b \cdot \frac{x^{1+n+m}}{1+n+m}$$

$$+ \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{q-2}b^2 \cdot \frac{x^{1+n+2m}}{1+n+2m}$$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{q-3}b^3 \cdot \frac{x^{1+n+3m}}{1+n+3m}$$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{q-4}b^4 \cdot \frac{x^{1+n+4m}}{1+n+4m}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + C.$$

Wenn q eine ganze bejahende Zahl ist; so wird im $(q+2)$ten Gliede ein Faktor $q-2$, $q-3$, $q-4$, $q-5$ u. s, f. des Koefficienten

$$\frac{q(q-1)\ (q-2)\ (q-3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$= q - q = 0$, folglich auch das $(q+2)$te und jedes folgende Glied $= 0$.

Diese Reihe hört also allzeit nach $(q+1)$ Glieder auf, und giebt ein **algebraisches Integrale** (das ist, welche nur in einer bestimmten Anzahl Glieder besteht) wenn q eine ganze bejahende Zahl ist.

Für $S\,dx(a + bx^2)^3$ ist $n = 0$, $m = 2$ und $q = 3$, also wird
$S\,dx(a + bx^2)^3 = a^3x + a^2bx^3$
$+ \frac{3}{5}\,ab^2x^5 + \frac{1}{7}\,b^3x^7 + C$

und für $S\,3dx(a - bx^{-\frac{1}{2}})^2$ ist $n = 0$
$m = -\frac{1}{2}$ und $q = 2$, also wird

$S\,3dx(a - bx^{-\frac{1}{2}})^2 = 3a^2x - 12abx^{\frac{1}{2}}$
$+ 3b^2 \log x + C.$ wie Nro 75.

Ist q keine ganze bejahende Zahl; so giebt diese Formel das Integrale allzeit durch eine unendliche Reihe, welche nur, nach Maß sie schnell abnehmend ist, anwendbar wird. Z. B.

Für $S\,dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist $n = 0$, $m = 2$

$q = \frac{1}{2}$, $a = 1$ und $b = -1$, also

1. $$S\,dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{x^{11}}{11} - \ldots\ldots + C.$$

Für $S\,dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist $n = 0$, $m = 2$

$q = -\frac{1}{2}$, $a = 1$ und $b = -1$, also

2. $$S\,dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots + C$$

also aus I Nro 63

$$\text{Bog Sin } x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots + C.$$

wie I. Nro 70.

Für

Für $Sdx(1 + x^2)^{-1}$ ist $n = 0$, $m = 2$ $q = -1$, $a = 1$ und $b = 1$, also

$$Sdx(1+x^2)^{-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C,$$ 3.

also aus 3. Nro. 63

$$\text{Bog tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C.$$

wie 3. Nro 70.

weil der Bogen $= 0$ wird, sobald sein Sinus oder seine Tangente $= 0$ ist; so giebt dieser Fall in den Gleichungen für Bog Sin x und für Bog Tang x ausgedrückt, $0 = C$.

Eben so findet man allzeit die Beständige C, wenn man in der gefundenen Gleichung für das Integrale jenen Fall, in welchem das Integrale ohnehin schon bekannt ist, ausdrücket.

Ist a verneinend und q ein Bruch, dessen Nenner eine gerade Zahl ist; so kömmt man bey der Entwicklung der allgemeinen Formel auf unmögliche Größen. Diese Schwierigkeit wird gehoben, wenn man das gegebene Differenziale von einem verneinenden a vorläufig nach Nro 77 verwandelt.

So wird

$Sdx(x^2-1)^{\frac{1}{2}} = Sxdx(1 - x^{-2})^{\frac{1}{2}}$,
wo $n = 1$, $m = -2$, $q = \frac{1}{2}$
$a = 1$ und $b = -1$, folglich

4. $Sdx(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = Sxdx(1 - x^{-2})^{\frac{1}{2}}$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} \log x + \frac{1}{2.4.2x^2}$$

$$+ \frac{1 . 3}{2.4.6.4x^4} + \frac{1 . 3 . 5}{2.4.6.8.6x^6}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C.$$

Eben so wird

$$S\frac{z^q dz}{mb^p} (z-a)^{p-1} = S\frac{z^{p+q-1} dz}{mb^p} (1-az^{-1})^{p-1},$$

wo $n = p + q - 1$, $m = -1$, $q = p - 1$, $a = 1$ und $b = -a$, folglich

5. $S\frac{z^q dz}{mb^p} (z-a)^{p-1} = S\frac{z^{p+q-1} dz}{mb^p} (1-az^{-1})^{p-1}$

$$= \frac{1}{mb^p}\Big(\frac{z^{p+q}}{p+q} - \frac{(p-1)}{1} \cdot a \cdot \frac{z^{p+q-1}}{p+q-1}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)}{1 . 2} \cdot a^2 \cdot \frac{z^{p+q-2}}{p+q-2}$$

$$- \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 . 2 . 3} \cdot a^3 \cdot \frac{z^{p+q-3}}{p+q-3}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1 . 2 . 3 . 4} \cdot a^4 \cdot \frac{z^{p+q-4}}{p+q-4}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big) + C.$$

79. Setzet man in der allgemeinen Formel des gegebenen Differenzials

$$x^n dx(a + bx^m)^q$$

$$a + bx^m = z;$$ so wird

$$x = \frac{1}{b^{\frac{1}{m}}} (z-a)^{\frac{1}{m}}$$

$$dx = \frac{dz}{mb^{\frac{1}{m}}} (z-a)^{\frac{1}{m}-1}$$

$$x^n = \frac{1}{b^{\frac{n}{m}}} (z-a)^{\frac{n}{m}},$$ also

$$x^n dx = \frac{dz}{mb^{\frac{n+1}{m}}} (z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$$

und, wenn $\frac{n+1}{m} = p$ ist,

$$x^n dx = \frac{dz}{mb^p} (z-a)^{p-1}$$

folglich

$$Sx^n dx (a + bx^m)^q = S\frac{z^q dz}{mb^p} (z-a)^{p-1}$$

nach Nro 77.

$$= S\frac{z^{p+q-1} dz}{mb^p} (1-az^{-1})^{p-1}$$

und aus 5 Nro 78.

$$= \frac{1}{mb^p}\left(\frac{z^{p+q}}{p+q} - \frac{(p-1)}{1} \cdot a \cdot \frac{z^{p+q-1}}{p+q-1}\right.$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot a^2 \cdot \frac{z^{p+q-2}}{p+q-2}$$

$$- \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot \frac{z^{p+q-3}}{p+q-3}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 \cdot \frac{z^{p+q-4}}{p+q-4}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big) + C,$$

endlich, wenn man anstatt z wieder seinen Werth $a + bx^m$ setzet;

$$Sx^n dx (a + bx^m)^q$$

$$= \frac{1}{mb^p} \Big(\frac{(a + bx^m)^{p+q}}{p + q}$$

$$- \frac{(p-1)}{1} \cdot a \cdot \frac{(a + bx^m)^{p+q-1}}{p+q-1}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot a^2 \cdot \frac{(a+bx^m)^{p+q-2}}{p+q-2}$$

$$- \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot \frac{(a+bx^m)^{p+q-3}}{p+q-3}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 \cdot \frac{(a+bx^m)^{p+q-4}}{p+q-4}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big) + C.$$

Ist nun $\frac{n+1}{m} = p$ eine ganze bejahende Zahl; so wird im $(p + 1)$ Gliede ein Faktor, $p - 1$, $p - 2$, $p - 3$ u. s. f. des Koefficienten

$$\frac{(p-1)\ (p-2)\ (p-3)}{1 \ . \ 2 \ . \ 3}$$

$= p - p = 0$, folglich auch das $(p + 1)$te und jedes folgende Glied $= 0$.

Die-

Diese zwote Formel hört also, im Falle $\frac{n+1}{m} = p$ eine ganze bejahende Zahl ist, nach p Glieder auf und giebt ein algebraisches Integrale.

So wird

$$Sx^3dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{7}(a^2+x^2)^{\frac{7}{3}} - \tfrac{3}{4}\cdot a^2(a^2+x^2)^{\frac{4}{3}}\right] = \tfrac{3}{56}(a^2+x^2)^{\frac{4}{3}}(4x^2-3a^2) + C.$$

$$Sgx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \frac{g}{2b^2}\left[\tfrac{5}{14}(a+bx^2)^{\frac{14}{5}} - \tfrac{5}{9}\cdot a(a+bx^2)^{\frac{9}{5}}\right] = \frac{5g}{2b^2}(a+bx^2)^{\frac{9}{5}}\left(\frac{a+bx^2}{14} - \frac{a}{9}\right) + C.$$

$$Sgx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{g}{3b^3}\left[\tfrac{3}{7}(a+bx^3)^{\frac{7}{3}} - \tfrac{6}{4}\cdot a(a+bx^3)^{\frac{4}{3}} + 3a^2(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{g}{b^3}(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\left[\tfrac{1}{7}(a+bx^3)^2 - \tfrac{1}{2}a(a+bx^3) + a^2\right] + C.$$ Und ferner

$$S\tfrac{3}{4}xdx(x-1)^{-2} = \tfrac{3}{4}\left[\log(x-1) - (x-1)^{-1}\right] \quad 1.$$

$$= \tfrac{3}{4}\left(\log(x-1) - \frac{1}{x-1}\right) + C$$

$$S\tfrac{5}{4}xdx(x+1)^{-2} = \tfrac{5}{4}\left[\log(x+1) + (x+1)^{-1}\right] \quad 2.$$

$$= \tfrac{5}{4}\left(\log(x+1) + \frac{1}{x+1}\right) + C.$$

3. $S6az^2dz(z+1)^{-1} = 6a\left[\frac{1}{2}(z+1)^2 - 2(z+1) + \log(z+1)\right] + C.$

4. $S6z^5dz(z+1)^{-1} = 6\left[\frac{1}{5}(z+1)^5 - \frac{5}{4}(z+1)^4 + \frac{10}{3}(z+1)^3 - \frac{10}{2}(z+1)^2 + 5(z+1) - \log(z+1)\right] + C.$

Oft wird $\frac{n+1}{m} = p$ erst eine ganze bejahende Zahl nachdem man das gegebene Differenziale nach Nro 77 verwandelt hat.

So wird

$$Sa^2dx(a+x^2)^{-\frac{3}{2}} = Sa^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (a^2x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(a^2x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

und

$$Sa^2x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = Sa^2x^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= Sa^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} = -2a(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2a\left(\frac{a}{x}+1\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Ist $\frac{n+1}{m} = p$ keine ganze bejahende Zahl; so läuft die Reihe ohne Ende fort, und giebt, nach Maß sie mehr oder weniger abnehmend ist, ein mehr oder weniger anwendbares Integrale.

So

So wird

$$Sdx(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big(\log(1+x^2) - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}$$

$$- \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(1+x^2)^{-2}}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{(1+x^2)^{-3}}{3}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{(1+x^2)^{-4}}{4} - \ldots\ldots\Big) + C.$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2 \cdot 2(1+x^2)} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4(1+x^2)^2}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6(1+x^2)^3}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8(1+x^2)^4} - \ldots\ldots + C.$$

Von dem Integriren durch Kreisbögen.

80. Aus 1 bis 12 Nro 63. fließen unmittelbar folgende Formeln:

$Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = Bog Sin x, 1.

$S-dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = Bog Kos x, 2.

$Sdx(1+x^2)^{-1}$ = Bog Tang x, 3.

$S-dx(1+x)^{-1}$ = Bog Kot x, 4.

$Sx^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ = Bog Sek x, 5.

also aus 2 Nro 50

= Bog Kos $\frac{1}{x}$

$S-x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ = Bog Kost x, 6.

also aus 4 Nro 50

$= \text{Bog Sin} \frac{1}{x}$,

7. $S dx(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} = S x^{-\frac{1}{2}} dx(2 - x)^{-\frac{1}{2}}$,

$= S x^{-1} dx(2x^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}} = \text{Bog Osin } x$

also aus 9 Nro 50

$= \text{Bog Kos } (1 - x)$,

8. $S - dx(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} = S - x^{-\frac{1}{2}} dx(2 - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= S - x^{-1} dx(2x^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}} = \text{Bog Okos } x$,

also aus 10 Nro 50

$= \text{Bog Sin } (1 - x)$,

9. $S dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \text{Bog Sin } x$,

10. $S - dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Bog Kos } x - \frac{1}{2} x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$,

11. $S - dx(2x - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Bog Sin } (1 - x)$

$+ \frac{1}{2} (1 - x)(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$,

12. $S dx(2x - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Bog Kos } (1 - x)$

$- \frac{1}{2} (1 - x)(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Von dem Integriren durch Logarithmen.

81. Wenn von einem gegebenen Differenziale der Zähler dividirt durch das Differenziale des Nenners einen beständigen Quotienten giebt; so erhält man nach Nro 64. das Integrale, wenn man eben diesen Quotienten in den Logarithme des Veränderlichen Faktors im Nenner multiplicirt.

So wird

$$S\,\frac{adx}{x} = a\log x + C$$

$$S\,\frac{xdx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

$$S\,\frac{dx}{2a^2(a-x)} = -\frac{1}{2a^2}\log(a-x)$$

$$S\,\frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n)} = \frac{1}{nb}\log(a+bx^n)$$

Uebrigens fließen aus 2 bis 10 Nro 64. noch folgende 9 Formeln:

$$S \pm \frac{dx}{x^2 \pm bx} = \frac{1}{b}\log\left(\frac{x}{x \pm b}\right) \qquad 1.$$

$$S - \frac{dx}{bx \pm x^2} = \frac{1}{b}\log\left(\frac{b \pm x}{x}\right) \qquad 2.$$

$$S\,\frac{dx}{x^2 - b^2} = \frac{1}{2b}\log\left(\frac{x-b}{x+b}\right) \qquad 3.$$

$$S\,\frac{dx}{b^2 - x^2} = \frac{1}{2b}\log\left(\frac{b+x}{b-x}\right) \qquad 4.$$

$$S - \frac{dx}{x(b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{b}\log\left(\frac{b+(b^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right) \qquad 5.$$

$$S\,\frac{dx}{(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}} = \log\left[x+(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad 6.$$

$$S\,dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}x(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} \qquad 7.$$

$$\pm \tfrac{1}{2}b^2\log\left[x+(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

8. $S \frac{dx}{(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}} = \log [x \pm \frac{1}{2} b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}]$

9. $S\, dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} = Sx^{\frac{1}{2}}\, dx(x \pm b)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{4} (2x \pm b)(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{8} b^2 \log [x \pm \frac{1}{2} b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}]$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Formeln Nro 80 und 81. durch die für den Halbmesser 1 berechneten trigonometrischen Tafeln und durch die Tafeln der natürlichen Logarithmen schon für sich selbst bey der Anwendung einen öftern Gebrauch haben. Dieser Gebrauch wird durch folgende Untersuchungen erweitert.

Von der Methode das verlangte Integrale durch ein schon bekanntes zu bestimmen.

82. Sucht man von $x^{1+n-m} (a + bx^m)^{k+1}$ das Differenziale; so wird

$d[x^{1+n-m}(a + bx^m)^{k+1}] =$

$(1+n-m)x^{n-m}dx(a+bx^m)^{k+1} + (k+1)mbx^n dx(a+bx^m)^k$

$= (1 + n - m)x^{n-m}dx(a + bx^m)^k(a + bx^m)$

$+ (mk + m)bx^n\, dx(a + bx^m)^k$

$= (1 + n - m)ax^{n-m}\, dx(a + bx^m)^k + (1 + n - m)$

$bx^n dx(a + bx^m)^k + (mk + m)bx^n\, dx(a + bx^m)^k$

$= (1 + n - m)\, ax^{n-m}dx(a+bx^m)^k + (1 + n + mk)$

$bx^n dx(a + bx^m)^k$

also ist

$$x^n dx(a + bx^m)^k = \frac{[dx^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}]}{b(1 + n + mk)}$$

$$- \frac{a(1+n-m)}{b(1+n+mk)} \cdot x^{n-m} dx(a + bx^m)^k,$$

folglich auch

$$Sx^n dx(a + bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m}(a + bx^m)^{k+1}}{b(1 + n + mk)}$$

$$- \frac{a(1 + n - m)}{b(1 + n + mk)} \cdot Sx^{n-m} dx(a + bx^m)^k.$$

Oder, wenn man der Kürze wegen $1 + n - m = h$ und $1 + n + mk = g$ setzet,

1tens $Sx^n dx(a + bx^m)^k = \frac{x^h(a + bx^m)^{k+1}}{bg}$

$$- \frac{ah}{bg} Sx^{n-m} dx(a + bx^m)^k,$$

also auch nach ebendieser Formel

2tens $Sx^{n-m} dx(a + bx^m)^k = \frac{x^{h-m}(a + bx^m)^{k+1}}{b(g-m)}$

$$- \frac{a(h - m)}{b(g - m)} Sx^{n-2m} dx(a + bx^m)^k$$

3tens $Sx^{n-2m} dx(a + bx^m)^k = \frac{x^{h-2m}(a + bx^m)^{k+1}}{b(g - 2m)}$

$$- \frac{a(h-2m)}{b(g-2m)} Sx^{n-3m} dx(a + bx^m)^k$$

4tens $Sx^{n-3m}dx(a + bx^m)^k = \frac{x^{h-3m}(a + bx^m)^{k+1}}{b(g - 3m)}$

$- \frac{a(h - 3m)}{b(g - 3m)} Sx^{n-4m}dx(a + bx^m)^k$

und so fort.

Also, wenn man anstatt des im zweyten Gliede angezeigten Integrals jedesmal seinen Werth aus der darauf folgenden Gleichung setzet,

$$Sx^n dx(a + bx^m)^k = \frac{x^h(a + bx^m)^{k+1}}{bg}$$

$$- \frac{ah}{b^2 g(g - m)} \cdot x^{h-m}(a + bx^m)^{k+1}$$

$$+ \frac{a^2 h(h-m)}{b^3 g(g-m)(g-2m)} \cdot x^{h-2m}(a + bx^m)^{k+1}$$

$$- \frac{a^3 h(h-m)(h-2m)}{b^4 g(g-m)(g-2m)(g-3m)} \cdot x^{h-3m}(a + bx^m)^{k+1}$$

$$+ \frac{a^4 h(h-m)(h-2m)(h-3m)}{b^4 g(g-m)(g-2m)(g-3m)} \cdot Sx^{n-4m}dx(a+bx^m)^k$$

Und allgemein wird bey einer geraden oder ungeraden Anzahl l der Bestimmungen das letzte oder (l+1)te Glied der Reihe

$$\pm \frac{a^l h(h-m)\ldots\ldots[h-(l-1)m]}{b^l g(g-m)\ldots\ldots[g-(l-1)m]} Sx^{n-lm}dx(a+bx^m)^k.$$

Wenn also zwey Differenzialen

$x^n dx(a + bx^m)^k$ und

$x^r dx(a + bx^m)^k$

so

so beschaffen sind, daß $r = n - lm$, also $\frac{n-r}{m} = l$ eine ganze bejahende Zahl ist; so wird das Integrale des einen durch das Integrale des andern bestimmt, wenn man l Glieder nach obiger Formel und das letzte nach der allgemeinen Formel für das $(l+1)$te Glied entwickelt.

Sind die zwey Differenzialen

$$x^{10}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}; \text{ so wird}$$

$n = 10$, $m = 2$, $k = \frac{1}{2}$, $r = 0$, $l = 5$

$a = 1$, $b = -1$, $h = 9$ und $g = 12$, also

$$Sx^{10}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}x^9(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{9}{12.10}x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{9.7}{12.10.8}x^5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{9.7.5}{12.10.8.6}x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{9.7.5.3}{12.10.8.6.4}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{9.7.5.3.1}{12.10.8.6.4}Sdx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich aus 9 Nro 80.

$$Sx^{10}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{9.7.5.3.1}{12.10.8.6.4}\Big(\frac{x}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\text{Bog Sin } x\Big) - \Big(\frac{1}{12}x^9 + \frac{9}{12.10}x^7 + \frac{9.7}{12.10.8}x^5$$

$$+\frac{9.7.5.}{12.10.8.6}x^3 + \frac{9.7.5.3}{12.10.8.6.4}x\Big)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ C.$$

Sind

Sind die zwey Differenzialen

$$x^6dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}; \text{ so ist}$$

$n = 6$, $m = 2$, $k = \frac{1}{2}$, $r = 0$, $l = 3$, $a = \pm b^2$, $b = 1$, $h = 5$ und $g = 8$, also

$$Sx^6dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} x^5(x^2 \pm b^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\mp \frac{5.b^2}{8.6} x^3(x^2 \pm b^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5.3.b^4}{8.6.4} x (x^2 \pm b^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\mp \frac{5.3.b^6}{8.6.4} Sdx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 7. Nro 81.

$$Sx^6dx(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{1}{8} x^5 \mp \frac{5.b^2}{8.6} x^3$$

$$+ \frac{5.3.b^4}{8.6.4} x\Big)(x^2 \pm b^2)^{\frac{3}{2}} \mp \frac{5.3.b^6}{8.6.4}\Big(\frac{x}{2}$$

$$(x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{b^2}{2} \log [x + (x^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}}]\Big) + C.$$

Sind diese Integralen

$$Sx^2dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Sx^4dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Sx^6dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Sx^8dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

durch das Integrale

$$Sdx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ zu bestimmen;}$$

so

so wird

$$Sx^2dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad 1.$$

$$+\tfrac{1}{2}Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Sx^4dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{4}x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad 2.$$

$$-\frac{3}{4.2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3.1}{4.2}Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Sx^6dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad 3.$$

$$-\frac{5}{6.4}x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3}{6.4.2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{5.3.1}{6.4.2}Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Sx^8dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{8}x^7(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad 4.$$

$$-\frac{7}{8.6}x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{7.5}{8.6.4}x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{7.5.3}{8.6.4.2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Die allgemeine Formel setzet voraus, daß $n > r$ sey; wenn also der Exponent von x in dem Differenziale, welches durch ein anders bestimmt werden soll, kleiner ist als der Exponent von x in dem bekannten Integrale; so muß dieser für n und jener für r angenommen werden.

Sind z. B. die Integralen

$$Sx^{-3}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$Sx^{-5}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$Sx^{-7}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

durch

durch das Integrale

$$Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$ zu bestimmen;

so wird $n = -1$, $m = 2$, $k = -\frac{1}{2}$

$a = -1$, $b = 1$, $r = -3, -5, -7,$ folglich $l = 1, 2, 3$

$h = -2$ und $g = -1$ also

1tens $Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = - x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$+ 2Sx^{-3}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$

2tens $Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = - x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$- \frac{2}{3}x^{-4}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{2.4}{3} Sx^{-5}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$

3tens $Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = - x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$- \frac{2}{3} x^{-4}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2.4}{3.5} x^{-6}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$+ \frac{2.4.6}{3.5} Sx^{-7}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$

folglich auch

5. $Sx^{-3}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$+ \frac{1}{2} Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$

6. $Sx^{-5}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2.4} x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2.4} x^{-4}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2.4} Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$$Sx^{-7}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3.5}{2.4.6}\,x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$ 7

$$+ \frac{2}{3}\cdot\frac{3.5}{2.4.6}\,x^{-4}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{3.5}{2.4.6}\,x^{-6}$$

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3.5}{2.4.6}\,Sx^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

Eben so wird

$Sx^{-\frac{1}{2}}dx\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ durch

$Sx^{\frac{1}{2}}dx\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ bestimmt.

Denn es ist $n = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $k = \frac{1}{2}$

$a = \frac{p}{4}$, $b = 1$, $r = -\frac{1}{2}$, $l = 1$,

$h = \frac{1}{2}$ und $g = 2$

folglich

$$Sx^{\frac{1}{2}}dx\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{p}{16}\,Sx^{-\frac{1}{2}}dx\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$ also

$$Sx^{-\frac{1}{2}}dx\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{8x^{\frac{1}{2}}}{p}\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$ 8.

$$-\frac{16}{p}\,Sx^{\frac{1}{2}}dx\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Oft wird $\frac{n-r}{m}=1$ erst eine ganze bejahende Zahl nachdem man beyde Differenzialen nach Nro 77 verwandelt hat.

Sind z. B. die gegebenen Differenzialen

$$x^4dx(1-b^2x^{-2})^{-1}$$ und

$$x^{-2}dx(1-b^2x^{-2})^{-1}$$; so wird

$$x^4dx(1-b^2x^{-2})^{-1}=x^6dx(x^2-b^2)^{-1}$$

$$x^{-2}dx(1-b^2x^{-2})^{-1}=dx(x^2-b^2)^{-1}$$

$n=6$, $m=2$, $k=-1$, $r=0$, $l=3$

$a=-b^2$, $b=1$, $h=5$ und $g=5$

folglich

$$Sx^6dx(x^2-b^2)^{-1}=\frac{1}{5}x^5+\frac{b^2}{3}x^3$$

$$+b^4x+b^6Sdx(x^2-b^2)^{-1}$$

also aus 3 Nro 81.

9. $$Sx^4dx(1-b^2x^{-2})^{-1}=Sx^6dx(x^2-b^2)^{-1}$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{b^2x^3}{3}+b^4x+\frac{b^5}{2}\log\left(\frac{x-b}{x+b}\right)$$

$$+C.$$

Ist $\frac{n-r}{m}=1$ keine ganze bejahende Zahl, so kann diese Formel noch dienen: wenn nämlich das verlangte Integrale dadurch in eine so schnell abnehmende Reihe aufgelöset wird, daß das letzte Glied, welches das bekannte Integrale enthalten sollte, zur Annäherung nicht mehr vonnöthen ist.

83. Sucht man ferner das Differenziale von

$$x^{n+1}(a + bx^m)^p;$$

so wird

$$d[x^{n+1}(a + bx^m)^p]$$

$$= (n+1)x^n dx(a+bx^m)^p + bmpx^{n+m}dx(a+bx^m)^{p-1}$$

also

$$x^n dx(a + bx^m)^p = \frac{d[x^{n+1}(a + bx^m)^p]}{n + 1}$$

$$- \frac{bmp}{n+1} x^{n+m}dx(a + bx^m)^{p-1},$$

folglich auch

$$Sx^n dx(a + bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a + bx^m)^p}{n + 1}$$

$$- \frac{bmp}{n+1} Sx^{n+m}dx(a + bx^m)^{p-1}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $n+1 = f$ setzet,

1tens $Sx^n dx(a + bx^m)^p = \frac{x^f}{f}(a + bx^m)^p$

$$- \frac{bmp}{f} Sx^{n+m}dx(a + bx^m)^{p-1}$$

und nach eben dieser Formel

2tens $Sx^{n+m}dx(a + bx^m)^{p-1} = \frac{x^{f+m}}{f+m}(a + bx^m)^{p-1}$

$$- \frac{bm(p-1)}{f+m} Sx^{n+2m}dx(a + bx^m)^{p-2}$$

3tens $Sx^{n+2m}dx(a+bx^m)^{p-2} = \frac{x^{f+2m}}{f+2m}(a+bx^m)^{p-2}$

$$-\frac{bm(p-2)}{f+2m}Sx^{n+3m}dx(a+bx^m)^{p-3}$$

4tens $Sx^{n+3m}dx(a+bx^m)^{p-3} = \frac{x^{f+3m}}{f+3m}(a+bx^m)^{p-3}$

$$-\frac{bm(p-3)}{f+3m}Sx^{n+4m}dx(a+bx^m)^{p-4}$$ u. s. f.

also, wenn mann anstatt des im zweyten Gliede angezeigten Integrals allemal seinen Werth aus der darauf folgenden Gleichung setzet,

$$Sx^n dx(a+bx^m)^p = \frac{x^f}{f}(a+bx^m)^p$$

$$-\frac{bmp}{f(f+m)}x^{f+m}(a+bx^m)^{p-1}$$

$$+\frac{b^2m^2p(p-1)}{f(f+m)(f+2m)}x^{f+2m}(a+bx^m)^{p-2}$$

$$-\frac{b^3m^3p(p-1)(p-2)}{f(f+m)(f+2m)(f+3m)}x^{f+3m}(a+bx^m)^{p-3}$$

$$+\frac{b^4m^4p(p-1)(p-2)(p-3)}{f(f+m)(f+2m)(f+3m)}Sx^{n+4m}dx(a+bx^m)^{p-4}.$$

Und allgemein wird bey einer geraden oder ungeraden Anzahl s der Bestimmungen das letzte oder (s+1)te Glied

$$\pm\frac{b^s m^s p(p-1)\ldots[p-(s-1)]}{f(f+m)\ldots\ldots[f+(s-1)m]}Sx^{n+sm}dx(a+bx^m)^{p-s}$$

Wenn

Wenn also zwey Differenzialen

$x^n dx(a + bx^m)^p$ und

$x^r dx(a + bx^m)^k$

so beschaffen sind, daß $k = p - s$, also $p - k = s$ eine ganze bejahende Zahl ist; so wird nach dieser Formel $Sx^n dx(a + bx^m)^p$ durch $Sx^{n+sm} dx(a + bx^m)^k$ und sodann nach der Formel Nro. 82. $Sx^{n+sm} dx(a + bx^m)^k$ durch $Sx^r dx(a + bx^m)^k$ bestimmt, wenn $\frac{n + sm - r}{m}$ oder $\frac{n - r}{m}$ eine ganze bejahende Zahl ist.

Sind z. B. die zwey Differenzialen

$x^{-5} dx(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$ und

$x^{-2} dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$; so wird

$n = -5$, $m = 2$, $p = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$, $s = 2$

$a = -1$, $b = 1$ und $f = -4$,

also

$$Sx^{-5} dx(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = -\frac{x^{-4}}{4}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{3}{8} x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} Sx^{-1} dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

folglich aus 5 Nro 80.

$$Sx^{-5} dx(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \text{ Bog Kos } \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{4} x^{-4}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8} x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Sind die zwey Differenzialen

$x^2dx(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ und

$dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; so wird

$n = 2,\ m = 2,\ p = \frac{3}{2},\ k = \frac{1}{2},\ s = 1$

$a = 1,\ b = -1$ und $f = 3$,

also

$$Sx^2dx(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^3}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ Sx^4dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}};$$ sodann

nach der Formel Nro 82.

$$Sx^4dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}x^3(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{3}{6.4}x(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{6.4}Sdx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Folglich

$$Sx^2dx(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{6.4}x\right)(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{3}{6.4}Sdx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

also aus 9 Nro 80

$$Sx^2dx(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{6.4}x\right)(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{3}{6.4}\left(\frac{x}{2}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,\text{Bog Sin } x\right) + C.$$

Sind die zwey Differenzialen

$x^2dx(1 + x^2)^{-3}$ und

$dx(1 + x^2)^{-1}$; so wird,

weil p allzeit der größere und k der kleiner Exponent ist,

$p = -1$, $k = -3$, $n = 0$, $m = 2$, $s = 2$

$a = 1$, $b = 1$ und $f = 1$, also

$Sdx(1 + x^2)^{-1} = x(1 + x^2)^{-1}$

$+ \frac{2}{3} x^3(1 + x^2)^{-2} + \frac{8}{3} Sx^4dx(1 + x^2)^{-3}$

sodann nach der Formel Nro 82

$Sx^4dx(1 + x^2)^{-3} = - x^3(1 + x^2)^{-2}$

$+ 3Sx^2dx(1 + x^2)^{-3}$,

also

$Sdx(1 + x^2)^{-1} = x(1 + x^2)^{-1} + \frac{2}{3} x^3$

$(1 + x^2)^{-2} - \frac{8}{3} x^3(1 + x^2)^{-2}$

$+ 8 Sx^2dx(1 + x^2)^{-3}$

oder

$Sdx(1 + x^2)^{-1} = x(1 + x^2)^{-1}$

$- 2x^3(1 + x^2)^{-2} + 8Sx^2dx(1 + x^2)^{-3}$

folglich auch

$Sx^2dx(1 + x^2)^{-3} = \frac{1}{4} x^3(1 + x^2)^{-2}$

$- \frac{1}{8} x(1 + x^2)^{-1} + \frac{1}{8} Sdx(1 + x^2)^{-1}$

also aus 3 Nro 80.

$Sx^2dx(1 + x^2)^{-3} = \frac{1}{4} x^3(1 + x^2)^{-2}$

$- \frac{1}{8} x(1 + x^2)^{-1} + \frac{1}{8}$ Bog Tang $x + C$.

Sollte bey der Entwicklung dieser Formeln Nro 82 und 83. ein Nenner bg, $b^2g(g-m)$ u. s. f. oder f, $f(f+m)$ u. s. f. $=0$ werden; so muß man beyde Differenzialen nach Nro 77 verwandeln, und sodann erst diese Formeln anwenden.

Sind z. B. die gegebenen Differenzialen

$x^{-3}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$, und

$x^{-1}dx(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$; so wird

$n=-3$, $m=2$, $f=-2$ und

$f+m=0$.

Daher nach Nro 77.

$x^{-3}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = dx(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}$, und

$x^{-1}dx(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-2}dx(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$

also nach der Formel Nro 83.

$$Sdx(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}} = x(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}} - 3x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$- 3Sx^{-4}dx(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$$

sodann nach der Formel Nro 82.

$$Sx^{-4}dx(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\tfrac{1}{2}Sx^{-2}dx(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$$

folglich

$$Sx^{-3}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$-3x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\tfrac{3}{2}Sx^{-1}dx(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

also aus 5 Nro 81.

$$Sx^{-3}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\tfrac{3}{2}x^{-1}(x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}\log\left(\frac{1+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right)$$

$$+ C.$$

Wenn zu dem verlangten Integrale kein bekanntes, worauf die Formel Nro 82 oder 83 angewendet werden kann, gefunden wird; so kann auch diese Formel zur Annäherung dienen, im Falle man durch die Entwicklung derselben eine schnell abnehmende Reihe erhält.

Von dem Integriren der rationalen Brüche.

84. Ist das gegebene Differenziale ein rationaler Bruch, und der höchste Exponent von x im Zähler nicht wenigstens um 1 kleiner als der höchste Exponent von x im Nenner; so dividirt man den Zähler durch den Nenner bis endlich diese Bedingung stattfindet.

So wird z. B.

$$\frac{x^4dx}{a+bx^3} = x^4dx : a + bx^3 = \frac{xdx}{b} - \frac{\frac{a}{b}\cdot xdx}{a+bx^3}$$

Hat ein rationaler Bruch $\frac{dx}{x(a^2-x^2)}$ diese vorausgeschickte Eigenschaft, und der Nenner $x(a^2 - x^2)$ läßt sich in lauter ungleiche einfache Faktoren, x, $a - x$, $a + x$ auflösen; so setzet man den gegebenen Bruch

$$\frac{dx}{x(a-x)(a+x)} = \frac{Adx}{x} + \frac{Bdx}{a-x} + \frac{Cdx}{a+x},$$

bestimmt die Koefficienten, A, B, C nach Nro 54, und

integrirt sodann einen jeden aus diesen neuen Brüchen nach den vorigen Regeln.

Dividirt man z. B. die vorige Gleichung durch dx, befreyt dieselbe von den Brüchen, und zieht das erste Glied 1 bederseits ab; so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = Aa^2 &+ Bax - Ax^2 \\ &+ Cax + Bx^2 \\ - 1 &\qquad\quad - Cx^2 \end{aligned}$$

also $Aa^2 - 1 = 0$, $A = \frac{1}{a^2}$

$Ba + Ca = 0$, $B = -C$

$-A + B - C = 0$, $C = -\frac{1}{2a^2}$

folglich $B = \frac{1}{2a^2}$.

Daher wird

$$S\frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2}S\frac{dx}{x} + \frac{1}{2a^2}S\frac{dx}{a-x}$$

$$-\frac{1}{2a^2}S\frac{dx}{a+x} = \frac{1}{a^2}\log x - \frac{1}{2a^2}\log(a-x)$$

$$-\frac{1}{2a^2}\log(a+x) = \frac{1}{2a^2}\log x^2 - \frac{1}{2a^2}\log(a^2-x^2)$$

$$= \frac{1}{2a^2}\log\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) = \frac{1}{a^2}\log\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

Enthält der Nenner mehrere gleiche Faktoren z. B. $(x - a)^m$; so setzet man zu diesem Nenner $(x-a)^m$ den Zähler $= (Dx^{m-1} + Ex^{m-2} + Fx^{m-3} \ldots + R)dx$ und verfährt wie zu vor.

Die-

Diesem nach sey z. B.

$$\frac{(x^3 + x^2 + 2)dx}{x(x - 1)^2(x+1)^2} = \frac{Adx}{x}$$

$$+ \frac{(Bx + C)dx}{(x - 1)^2} + \frac{(Dx + E)dx}{(x + 1)^2}$$

durch dx Dividirt und die Brüche weggeschaft, giebt

$$x^3 + x^2 + 2 = A(x - 1)^2(x + 1)^2$$

$$+ Bx^2(x + 1)^2 + Cx(x + 1)^2$$

$$+ Dx^2(x - 1)^2 + Ex(x - 1)^2$$

Die angezeigten Multiplicationen verrichtet und beederseits $x^3 + x^2 + 2$ abgezogen, giebt

$$\begin{array}{lllll}
0 = A \ldots\ldots & & -2Ax^2 \ldots\ldots & & + Ax^4 \\
 & & + Bx^2 & + 2Bx^3 & + Bx^4 \\
 & + Cx & + 2Cx^2 & + Cx^3 & \\
 & & + Dx^2 & - 2Dx^3 & + Dx^4 \\
 & + Ex & - 2Ex^2 & + Ex^3 & \\
- 2 & & - x^2 & - x^3 &
\end{array}$$

also $A - 2 = 0$, $A = 2$,

$C + E = 0$, $E = - C$

$-4 + B + 4C + D - 1 = 0$, $C = \frac{5 - B - D}{4}$

$2B - 2D - 1 = 0$, $D = B - \frac{1}{2}$

$2 + 2B - \frac{1}{2} = 0$, $B = - \frac{3}{4}$

folglich $D = - \frac{5}{4}$, $C = \frac{7}{4}$ und $E = - \frac{7}{4}$

also

$$S\ \frac{(x^3 + x^2 + 2)dx}{x(x - 1)^2(x + 1)^2} = S\ \frac{2dx}{x} - S\ \frac{\frac{3}{4}xdx}{(x - 1)^2}$$

$$+ S\ \frac{\frac{7}{4}dx}{(x - 1)^2} - S\ \frac{\frac{5}{4}xdx}{(x + 1)^2} - S\ \frac{\frac{7}{4}dx}{(x + 1)^2}$$

Es ist aber $S\ \frac{2dx}{x} = 2 \log x$

sodann nach Nro 74.

$$S\ \tfrac{7}{4}\ dx(x - 1)^{-2} = -\ \tfrac{7}{4}\left(\frac{1}{x - 1}\right)$$

$$-\ S\ \tfrac{7}{4}\ dx(x + 1)^{-2} = +\ \tfrac{7}{4}\left(\frac{1}{x + 1}\right)$$

endlich nach Nro 79 aus 1 und 2,

$$-S\ \tfrac{3}{4}\ xdx(x-1)^{-2} = -\tfrac{3}{4}\log(x-1) + \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$-S\ \tfrac{5}{4}\ xdx(x+1)^{-2} = -\tfrac{5}{4}\log(x+1) - \tfrac{5}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

folglich

$$S\ \frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = 2 \log x - \frac{1}{x-1}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1}\right) - \tfrac{3}{4} \log (x-1) - \tfrac{5}{4} \log(x+1)$$

$$+ C.$$

Enthält der Nenner unmögliche Faktoren; so verfährt man mit ihrem Produkte wie mit dem Produkte der gleichen Faktoren.

Es sey z. B. (weil

$xx + 1 = (x + \sqrt{-1})\ (x - \sqrt{-1})$ ist)

$$\frac{(x^2 - x + 1)dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{Adx}{1+x} + \frac{(Bx + C)dx}{1 + x^2}.$$

Durch dx Dividirt, die Brüche weggeschaft und $x^2 - x + 1$ beederseits abgezogen, giebt

$$\begin{aligned} 0 = A \ldots\ldots\ldots & + Ax^2 \\ + Bx\ & + Bx^2 \\ + C + Cx & \\ - 1 + x\ & - x^2, \end{aligned}$$ also

$A + C - 1 = 0,\quad C = 1 - A,$

$B + 1 - A + 1 = 0,\quad B = A - 2,$

$A + A - 2 - 1 = 0,\quad A = \frac{3}{2}$

$B = -\frac{1}{2}$ und $C = -\frac{1}{2}$

Folglich

$$S\frac{(x^2 - x + 1)}{(1+x)(1+x^2)}dx = \tfrac{3}{2}S\frac{dx}{1+x} - \tfrac{1}{2}S\frac{xdx}{1+x^2}$$

$$- \tfrac{1}{2}S\frac{dx}{1+x^2},$$

Es ist aber

$$S\frac{dx}{1+x} = \log(1 + x)$$

$$S\frac{xdx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)$$

und aus 3 Nro 80.

$$S\frac{dx}{1+x^2} = \text{Bog Tang } x$$

also

also

$$S\frac{(x^2 - x + 1)dx}{(1 + x)(1 + x^2)} = \tfrac{1}{2}\log(1+x)$$

$$- \tfrac{1}{4}\log(1+x^2) - \tfrac{1}{2}\,\text{Bog Tang}\, x + C.$$

Enthält endlich der Nenner des gegebenen Differenzials einen Faktor von dieser Gestalt

$$(x^2 + ax + b)^m;$$

so setzet man den zugehörigen Zähler

$$= (Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Dx^{2m-3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R)dx$$

und verfährt wie zu vor.

Nur muß man beym Integriren das zweyte Glied ax des Nenners $(x^2 + ax + b)$ dadurch wegschaffen, daß man $x + \frac{1}{2}a = z$ setzet, und wie im folgenden Beyspiele zu Werke geht.

Es sey das gegebene Differenziale

$$\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+x^2)} = \frac{Adx}{x}$$

$$+ \frac{(Bx + C)dx}{(1+x)^2} + \frac{(Dx + E)dx}{1+x+x^2}.$$

Durch dx Dividirt, die Brüche weggeschafft und 1 beyderseits abgezogen, giebt

$$\begin{array}{llllll} 0 = A & + 3Ax & + 4Ax^2 & + 3Ax^3 & + Ax^4 \\ & & + Bx^2 & + Bx^3 & + Bx^4 \\ & + Cx & + Cx^2 & + Cx^3 & \\ & & + Dx^2 & + 2Dx^3 & + Dx^4 \\ & + Ex & + 2Ex^2 & + Ex^3 & \\ - 1. & & & & \end{array}$$

also $A - 1 = 0$, $A = 1$

$3 + C + E = 0$, $C = - E - 3$

$4 + B + E - 3 + D = 0$, $B = - D - E - 1$

$3 + D - 1 - E - 3 = 0$, $D = E + 1$

$1 - E - 1 = 0$, $E = 0$

$D = 1$, $B = - 2$, und $C = - 3$.

Folglich

$$S \frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+x^2)} = S \frac{dx}{x} - S \frac{2xdx}{(1+x)^2}$$

$$- S \frac{3dx}{(1+x)^2} + S \frac{xdx}{1+x+x^2}$$

Es ist aber $S \frac{dx}{x} = \log x$

nach Nro 79

$$- S\, 2xdx(1+x)^{-2} = -2 \log(1+x) - 2\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

nach Nro 74

$$- S\, 3dx(1+x)^{-2} = + 3 \left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Endlich, wenn $x + \frac{1}{2} = z$, folglich $x = z - \frac{1}{2}$ und $dx = dz$ ist,

$$S \frac{xdx}{1+x+x^2} = S \frac{(z - \frac{1}{2})dz}{\frac{3}{4} + zz} = S \frac{zdz}{zz + \frac{3}{4}}$$

$$- S \frac{\frac{1}{2}dz}{zz + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \log (zz + \tfrac{3}{4})$$

$$-\tfrac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\, S\, \frac{dz}{\frac{4zz}{3}+1}, \text{ alſo aus 3. Nro 80.}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log (zz + \tfrac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Bog Tang } \frac{2z}{\sqrt{3}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log (1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Bog Tang } \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Folglich

$$S\, \frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+x^2)} = \log x - 2 \log (1+x)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \log (1+x+x^2) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Bog}$$

$$\text{Tang } \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

So oft ein irrationaler Bruch ſich durch eine Verwandlung rational machen läßt; ſo kann auch dieſer nach vorigen Regeln integrirt werden.

So wird

$$S\, \frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}} = S\, \frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= S\, \frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}} \text{ und, wenn man}$$

$x^{\frac{1}{6}} = z$, alſo $x = z^6$ und $dx = 6z^5dz$ ſetzet,

=

$$= S\,\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^3} = S\,\frac{6z^5dz + 6az^2dz}{z + 1}$$

$$= S6z^5dz(z + 1)^{-1} + S6az^2dz(z + 1)^{-1}$$

folglich aus 4 und 3 Nro 79.

$$= 6[\tfrac{1}{5}(z + 1)^5 - \tfrac{5}{4}(z + 1)^4 + \tfrac{10}{3}(z + 1)^3$$

$$- \tfrac{10}{2}(z + 1)^2 + 5(z + 1) - \log(z + 1)]$$

$$+ 6\left(\frac{a}{2}(z + 1)^2 - 2a(z + 1) + a\log(z + 1)\right)$$

$$= 6[\tfrac{1}{5}(z + 1)^5 - \tfrac{5}{4}(z + 1)^4 + \tfrac{10}{3}(z + 1)^3$$

$$+ \left(\frac{a - 10}{2}\right)(z + 1)^2 - (2a - 5)(z + 1)$$

$$+ (a - 1)\log(z + 1)]$$

$$= 6[\tfrac{1}{5}(x^{\frac{1}{6}} + 1)^5 - \tfrac{5}{4}(x^{\frac{1}{6}} + 1)^4 + \tfrac{10}{3}(x^{\frac{1}{6}} + 1)^3$$

$$+ \left(\frac{a - 10}{2}\right)(x^{\frac{1}{6}} + 1)^2 - (2a - 5)(x^{\frac{1}{6}} + 1)$$

$$+ (a - 1)\log(x^{\frac{1}{6}} + 1)$$

$$= \tfrac{6}{5}(\sqrt[6]{x} + 1)^5 - \tfrac{15}{2}(\sqrt[6]{x} + 1)^4 + 20(\sqrt[6]{x} + 1)^3$$

$$+ (3a - 30)(\sqrt[6]{x} + 1)^2 - (12a - 30)(\sqrt[6]{x} + 1)$$

$$+ (6a - 6)\log(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

Von dem Integriren der Differenzialen, welche Logarithmen enthalten.

85. Weil $d(uz) = udz + zdu$ ist, so wird auch

$$uz = Sudz + Szdu,$$

oder

$$Sudz = uz - Szdu.$$

Also, wenn man $u = \log x$ und $dz = x^m dx$ folglich $du = \frac{dx}{x}$, und $z = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ setzet,

$$Sx^m dx \log x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - S\frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{Sx^m dx}{m+1}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot x^{m+1} \left(\log x - \frac{1}{m+1}\right) + C.$$

So wird

$$Sx^3 dx \log x = \frac{x^4}{4} (\log x - \tfrac{1}{4}) + C$$

$$Sx^{\frac{1}{2}} dx \log x = \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\log x - \tfrac{2}{3}) + C$$

$$Sx^{-\frac{1}{2}} dx \log x = 2x^{\frac{1}{2}} (\log x - 2) + C$$

$$Sx^{-4} dx \log x = -\tfrac{1}{3} x^{-3} (\log x + \tfrac{1}{3}) + C$$

Für $m = -1$ wird nach Nro 64 und 71.

$$S\frac{dx}{x} \log x = S \log x \, d \log x = \frac{\log^2 x}{2}$$

Se.

Setzet man $u = \log^n x$ und $dz = x^m dx$; so wird

$$Sx^m dx \log^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^n x - S \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot d \log^n x$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^n x - S \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot n \log^{n-1} x \cdot \frac{dx}{x}$$

also

1tens $Sx^m dx \log^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^n x$

$- \frac{n}{m+1} Sx^m dx \log^{n-1} x$

und nach eben dieser Formel

2tens $Sx^m dx \log^{n-1} x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^{n-1} x$

$- \frac{n-1}{m+1} Sx^m dx \log^{n-2} x$

3tens $Sx^m dx \log^{n-2} x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^{n-2} x$

$- \frac{n-2}{m+1} Sx^m dx \log^{n-3} x$

4tens $Sx^m dx \log^{n-3} x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^{n-3} x$

$- \frac{n-3}{m+1} Sx^m dx \log^{n-4} x$

u. s. f.

folglich

$$Sx^m dx \log^n x = x^{m+1} \left(\frac{1}{m+1} \log^n x \right.$$

$$- \frac{n}{(m+1)^2} \log^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^3} \log^{n-2} x$$

$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^4} \log^{n-3} x + \ldots . \right) + C$$

So wird

$$Sx^4 dx \log^3 x = x^5 \left(\frac{1}{5} \log^3 x - \frac{3}{5^2} \log^2 x \right.$$

$$\left. + \frac{3 \cdot 2}{5^3} \log x - \frac{3.2.1}{5^4} \cdot \right) + C$$

$$Sx^4 dx \log^{-3} x = x^5 \left(\frac{1}{5} \log^{-3} x + \frac{3}{5^2} \right.$$

$$\log^{-4} x + \frac{3 \cdot 4}{5^3} \log^{-5} x + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5^4} \log^{-6} x$$

$$\left. + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{5^5} \log^{-7} x + \ldots\ldots\ldots \right) + C$$

Für $m = -1$ wird

$$S \frac{dx}{x} \log^n x = S \log^n x \; d \log x = \frac{\log^{n+1} x}{n+1}$$

Für $-n$ und $m = -1$ wird

$$S \frac{dx}{x} \log^{-n} x = S \log^{-n} x \; d \log x = \frac{1}{1-n} \log^{1-n} x.$$

$+ C.$

Von dem Integriren der Differenzialen, welche Exponentialgrößen enthalten.

86. Weil nach Nro. 65. $d(a^x) = a^x dx \log a$ ist; so wird auch

$$Sa^x dx \log a = \frac{a^x dx \log a}{dx \log a} = a^x,$$

und eben so

$$Sa^x dx = \frac{a^x dx}{dx \log a} = \frac{a^x}{\log a}$$

$$Sa^{mx} dx = \frac{a^{mx} dx}{m dx \log a} = \frac{a^{mx}}{m \log a}$$

sodann nach der Formel $Sudz = uz - Szdu$,

wenn $a^x dx = dz$ und $x^n = u$ ist,

$$Sa^x x^n dx = x^n Sa^x dx - S(nx^{n-1} dx Sa^x dx)$$

$$= \frac{x^n a^x}{\log a} - S \frac{a^x}{\log a} \cdot nx^{n-1} dx$$

also

$$\text{1tens } Sa^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{\log a} - n S \frac{a^x x^{n-1} dx}{\log a}$$

und nach eben dieser Formel

$$\text{2tens } S \frac{a^x x^{n-1} dx}{\log a} = \frac{a^x x^{n-1}}{\log^2 a} - (n-1) S \frac{a^x x^{n-2} dx}{\log^2 a}$$

$$\text{3tens } S \frac{a^x x^{n-2} dx}{\log^2 a} = \frac{a^x x^{n-2}}{\log^3 a} - (n-2) S \frac{a^x x^{n-3} dx}{\log^3 a}$$

$$\text{4tens } S \frac{a^x x^{n-3} dx}{\log a} = \frac{a^x x^{n-3}}{\log^4 a} - (n-3) S \frac{a^x x^{n-4} dx}{\log^4 a}$$

folglich

$$Sa^x x^n dx = a^x \left(\frac{x^n}{\log a} - n \frac{x^{n-1}}{\log^2 a} \right.$$

$$+ n(n-1) \frac{x^{n-2}}{\log^3 a} - n(n-1)(n-2) \frac{x^{n-3}}{\log^4 a}$$

$$\left. + n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{x^{n-4}}{\log^5 a} - \ldots\ldots \right) + C.$$

So wird

$$Sa^x x^3 dx = a^x \left(\frac{x^3}{\log a} - 3 \frac{x^2}{\log^2 a} \right.$$

$$\left. + 6 \frac{x}{\log^3 a} - \frac{6}{\log^4 a} \right) + C$$

Ist a die Grundzahl der Logarithmen, also $\log a = 1$; so wird

$$Sa^x x^n dx = a^x [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}$$

$$- n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots]$$ und

$$Sa^x x^3 dx = a^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

Setzet man in der letzten allgemeinen Formel $Sa^{mx}dx = \frac{a^{mx}}{m\log a}$ anstatt $Sa^x dx = \frac{a^x}{\log a}$; so erhält man

$$Sa^{mx}x^n dx = a^{mx} \left(\frac{x^n}{m\log a} \right.$$

$$- n \frac{x^{n-1}}{m^2\log^2 a} + n(n-1) \frac{x^{n-2}}{m^3\log^3 a}$$

$$\left. - n(n-1)(n-2) \frac{x^{n-3}}{m^4\log^4 a} + \ldots\ldots\ldots \right) + C.$$

Von

Von dem Integriren der Differenzialen, welche Sinus und Kosinus enthalten.

87. Weil d Sin z = dz Kos z, und d Kos z = — dz Sin z ist; so wird auch

$$Sdz \text{ Kos } z = \text{Sin } z$$

$$Sdz \text{ Sin } z = - \text{Kos } z \text{ und}$$

$$Sdz \text{ Kos } mz = \frac{dz \text{ Sin } mz}{mdz} = \frac{\text{Sin } mz}{m}$$

$$Sdz \text{ Sin } mz = - \frac{dz \text{ Kos } mz}{mdz} = - \frac{\text{Kos } mz}{m}$$

$$Sdz \text{ Kos } z \text{ Sin}^n z = S \text{ Sin}^n z \, d(\text{Sin } z)$$

$$= \frac{\text{Sin}^{n+1} z}{n+1} + C$$

$$Sdz \text{ Sin } z \text{ Kos}^n z = S - \text{Kos}^n z \, d(\text{Kos } z)$$

$$= - \frac{\text{Kos}^{n+1} z}{n+1} + C$$

Sodann aus 23 Nro 50

$$Sdz \text{ Sin } pz \text{ Kos } qz = Sdz \left[\tfrac{1}{2}\text{Sin } (p+q)z\right]$$

$$+ Sdz \left[\tfrac{1}{2} \text{ Sin } (p-q)z\right]$$

$$= - \frac{\text{Kos } (p+q)z}{2(p+q)} - \frac{\text{Kos } (p-q)z}{2(p-q)} + C$$

Aus 25 Nro 50

$$Sdz \text{ Sin } pz \text{ Sin } qz = Sdz\left[\tfrac{1}{2} \text{ Kos } (p-q)z\right]$$

$$- Sdz\left[\tfrac{1}{2} \text{ Kos } (p+q)z\right]$$

$$= \frac{\text{Sin } (p-q)z}{2(p-q)} - \frac{\text{Sin } (p+q)z}{2(p+q)} + C.$$

Aus 24 Nro 50

$S dz\ \text{Kos}\ pz\ \text{Kos}\ qz = S dz[\frac{1}{2}\ \text{Kos}\ (p+q)z]$

$+ S dz[\frac{1}{2}\ \text{Kos}\ (p-q)z]$

$$= \frac{\text{Sin}\ (p+q)z}{2(p+q)} + \frac{\text{Sin}\ (p-q)z}{2(p-q)} + C$$

Es ist ferner

$Sxdy = xy - Sydx.$

Also, wenn $x = z^n$ und $dy = dz\ \text{Sin}\ z$, folglich $dx = nz^{n-1}\ dz$ und $y = S dz\ \text{Sin}\ z$ gesetzet wird,

$Sz^n dz\ \text{Sin}\ z = z^n S dz\ \text{Sin}\ z - S[nz^{n-1}dz \cdot S dz\ \text{Sin}\ z]$

oder

1tens $Sz^n dz\ \text{Sin} z = - z^n\ \text{Kos} z + nSz^{n-1}dz\ \text{Kos} z$

und eben so

2tens $Sz^{n-1}dz\ \text{Kos} z = z^{n-1}\text{Sin} z - (n-1)Sz^{n-2}dz\ \text{Sin} z$

3tens $Sz^{n-2}dz\ \text{Sin} z = - z^{n-2}\text{Kos} z + (n-2)Sz^{n-3}dz\ \text{Kos} z$

4tens $Sz^{n-3}dz\ \text{Kos} z = z^{n-3}\text{Sin} z - (n-3)Sz^{n-4}dz\ \text{Sin} z$

folglich

$Sz^n dz\ \text{Sin} z = - z^n\ \text{Kos} z + nz^{n-1}\ \text{Sin} z + n(n-1)$

$z^{n-2}\ \text{Kos} z - n(n-1)\ (n-2)z^{n-3}\ \text{Sin}\ z$

$- n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)z^{n-4}\ \text{Kos} z + \ldots\ldots$

Eben so wird

1tens $Sz^n dz\ \text{Kos} z = z^n\ \text{Sin} z - nSz^{n-1}dz\ \text{Sin} z$

2tens $Sz^{n-1}dz\ \text{Sin} z = - z^{n-1}\text{Kos} z + (n-1)Sz^{n-2}dz\ \text{Kos} z$

3tens $Sz^{n-2}dz\ \text{Kos} z = z^{n-2}\ \text{Sin} z - (n-2)Sz^{n-3}dz\ \text{Sin} z$

4tens $Sz^{n-3}dz\ \text{Sin} z = - z^{n-3}\text{Kos} z + (n-3)Sz^{n-4}dz\ \text{Kos} z$

folg.

folglich

$Sz^n dz$ Kos $z = z^n$ Sin $z + nz^{n-1}$ Kos z

$- n(n-1)z^{n-2}$ Sin $z - n(n-1)(n-2)z^{n-3}$ Kos z

$+ n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4}$ Sin $z + \ldots\ldots\ldots$

Ist z. B. $n = 3$; so wird

$Sz^3 dz$ Sin $z = - z^3$ Kos $z + 3z^2$ Sin z

$+ 6z$ Kos $z - 6$ Sin $z + C$, und

$Sz^3 dz$ Kos $z = z^3$ Sin $z + 3z^2$ Kos $z - 6z$ Sin $z - 6$ Kos $z + C$.

Weil ferner

Sdz Sin$^n z = S$ Sin$^{n-1}z \cdot dz$ Sin z ist;

so wird, wenn man in dieser Formel

$$Sxdy = xy - Sydx$$

$x =$ Sin^{n-1}z und $y = Sdz$ Sin z setzet

Sdz Sin$^n z = S$ Sin$^{n-1}z \cdot dz$ Sin z

$= -$ Sin^{n-1}z Kos $z + (n-1) S$ Sin$^{n-2}z \cdot dz$ Kos$^2 z$

folglich aus 7 Nro 50.

Sdz Sin$^n z = -$ Sin^{n-1}z Kos z

$+ (n-1) Sdz$ Sin$^{n-2}z - (n-1) Sdz$ Sin$^n z$

oder

1tens Sdz Sin$^n z = - \frac{1}{n}$ Kos z Sin^{n-1}z

$+ \frac{n-1}{n} Sdz$ Sin^{n-2}z

2tens Sdz Sin$^{n-2}z = - \frac{1}{n-2}$ Kos z Sin^{n-3}z

$+ \frac{n-3}{n-2} Sdz$ Sin^{n-4}z

3tens $Sdz\ Sin^{n-4}z = -\frac{1}{n-4}\ Kos z\ Sin^{n-5}z$

$+ \frac{n-5}{n-4}\ Sdz\ Sin^{n-6}z$

4tens $Sdz\ Sin^{n-6}z = -\frac{1}{n-6}\ Kos z\ Sin^{n-7}z$

$+ \frac{n-7}{n-6}\ Sdz\ Sin^{n-8}z.$

Für ein ungerades n wird also der erste Theil der letzten Bestimmung — Kos z und der zweyte Theil = 0, für ein gerades n aber der erste Theil der letzten Bestimmung = $-\frac{1}{2}$ Kos z Sin z und der zweyte Theil = $\frac{1}{2}$ z.

Folglich

$$Sdz\ Sin^{n}z = -\frac{1}{n}\ Kos z\ Sin^{n-1}z$$

$$-\frac{n-1}{n(n-2)}\ Kos z\ Sin^{n-3}z - \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}$$

$$Kos z\ Sin^{n-5}z - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)(n-6)} Kos z\ Sin^{n-7}z$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und endlich für ein ungerades n, das $\left(\frac{n+1}{2}\right)$te Glied

$$= -\frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots}{n(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots}.\ Kos z$$

und für ein gerades n, das $\left(\frac{n}{2}+1\right)$te Glied

$$= +\frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots 1}{n(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots 2}.\ z$$

So

So wird

$$Sdz\ \text{Sin}^5 z = -\tfrac{1}{5}\ \text{Kos}\,z\ \text{Sin}^4 z - \frac{4}{5 \cdot 3}\ \text{Kos}\,z$$

$$\text{Sin}^2 z - \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}\ \text{Kos}\,z + C$$

und

$$Sdz\ \text{Sin}^6 z = -\tfrac{1}{6}\ \text{Kos}\,z\ \text{Sin}^5 z - \frac{5}{6.4}\ \text{Kos}\,z\ \text{Sin}^3 z$$

$$- \frac{5 \cdot 3}{6.4.2}\ \text{Kos}\,z\ \text{Sin}\,z + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6.4.2}\ z + C$$

Ist $z = 90° - u$; so wird

$dz = -du$, und $\text{Sin}\,z = \text{Kos}\,u$

also

$$Sdu\ \text{Kos}^n u = + \frac{1}{n}\ \text{Sin}\,u\ \text{Kos}^{n-1} u$$

$$+ \frac{n-1}{n(n-2)}\ \text{Sin}\,u\ \text{Kos}^{n-3} u + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}$$

$$\text{Sin}\,u\,\text{Kos}^{n-5} u + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)(n-6)}\ \text{Sin}\,u\ \text{Kos}^{n-7} u$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

und endlich für ein ungerades n das $\left(\frac{n+1}{2}\right)$te Glied

$$= + \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots\ldots}{n(n-2)\ \ldots\ldots\ldots}.\ \text{Sin}\,u$$

und für ein gerades n das $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$te Glied

$$= - \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots 1}{n(n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots 2}.\ u$$

Für

Für n = 5 wird

$$Sdu\ Kos^5 u = \tfrac{1}{5}\ Sin\ u\ Kos^4 u + \frac{4}{5.3}\ Sin\ u\ Kos^2 u$$

$$+ \frac{4.2}{5.3}\ Sin\ u + C$$

Für n = 6 wird

$$Sdu\ Kos^6 u = \tfrac{1}{6}\ Sin\ u\ Kos^5 u + \frac{5}{6.4}$$

$$Sin\ u\ Kos^3 u + \frac{5.3}{6.4.2}\ Sin\ u\ Kos\ u$$

$$- \frac{5.3.1}{6.4.2}\ u + C.$$

Anwendung.

Von dem Inhalte der durch krumme Linien begränzten Flächen.

Fig. 96. 88. Wenn von jeder Krummen 01 die Abscisse 04 = x und die senkrechte Ordinate 41 = y ist, und x um 45 = dx, folglich y um 23 = dy wächst; so wächst auch die Fläche 140 um das Trapez 1452. Dieses Trapez ist also das Differenziale der Fläche 140, und $= dx\left(\frac{2y+dy}{2}\right) = \frac{2ydx+dydx}{2}$, folglich nach Nro 53 = ydx; und daher jede Fläche

$$140 = Sydx + C.$$

In der Parabel ist

$$y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}},\ \text{also}$$

$$140 = Sydx = Sp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{2}{3}\ p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{2}{3}\ x \cdot p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\ xy + C$$

Die

Die Fläche wird $= 0$ wenn $x = 0$ ist, dieser Fall in der Gleichung $140 = \frac{2}{3}\,xy + C$ ausgedrückt, giebt

$$0 = C$$

folglich ist allzeit $140 = \frac{2}{3}\,xy$.

Verlangt man die Fläche 1467, und setzt $06 = u$, und $67 = z$; so wird diese Fläche $1467 = 0$, wenn $x = u$ und $y = z$ ist.

Dieser Fall giebt

$$0 = \frac{2}{3}\,uz + C \text{ also}$$

$$C = -\frac{2}{3}\,uz, \text{ folglich}$$

$$1467 = \frac{2}{3}\,xy - \frac{2}{3}\,uz \text{ oder}$$

$$1467 = \frac{2}{3}\,(xy - uz).$$

In der Parabel von jedem Grade ist

$$y = p^{\frac{n}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}} \text{ also}$$

$$140 = Sydx = Sp^{\frac{n}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}} dx$$

$$= \frac{p^{\frac{n}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}+1}}{\frac{m}{m+n}+1} = \left(\frac{m+n}{2m+n}\right) x \cdot p^{\frac{n}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}}$$

$$= \left(\frac{m+n}{2m+n}\right) xy + C.$$

Wenn $x = 0$ ist, so wird die Fläche $140 = 0$ also ist auch $C = 0$.

Hin-

Hingegen wird die Fläche 1467 = o wenn x = u, und y = z ist. Dieser Fall giebt

$$o = \left(\frac{m+n}{2m+n}\right) uz + C, \text{ also}$$

$$C = -\left(\frac{m+n}{2m+n}\right) uz \text{ und}$$

$$1467 = \left(\frac{m+n}{2m+n}\right) (xy - uz)$$

Fig. 97. Rechnet man die Abscissen von dem Mittelpunkte an; so ist im Kreise für den Halbmesser 1

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ also}$$

$$0231 = Sydx = Sdx\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 1 Nro 78

$$0231 = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Denn wenn x = o ist; so wird die Fläche 0231, = o, also auch C = o.

Zieht man 12; so wird das Dreyeck 132 = $\frac{x}{2}$ $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

also aus 1 Nro 57

$$= \frac{x}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}x^6\right.$$

$$\left. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

=

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.2}x^3 - \frac{1}{2.2.4}x^5 - \frac{1.3}{2.2.4.6}x^7$$

$$- \frac{1.3.5}{2.2.4.6.8}x^9 - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1.5}{2.2.4}\cdot\frac{x^5}{5}$$

$$- \frac{1.3.7}{2.2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1.3.5.9}{2.2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} - \ldots\ldots$$

Dieses Dreyeck von der Fläche 0231 abgezogen giebt den Sektor 021

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2.2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.2.4}\cdot\frac{x^5}{5}$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} + \ldots\ldots$$

Ist 01 = z; so ist auch

$$021 = \frac{01 \times 02}{2} = \frac{z}{2}, \text{ also}$$

$$z = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} + \ldots\ldots$$

wie I. Nro 70.

Setzet man anstatt des Halbmessers 1 den Halbmesser a nach Nro 51; so wird

$$0231 = ax - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^3}$$

$$- \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7a^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9a^7} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Fig. 98. In der Elipse ist für die kleine Achse = 2b und die große = 2

$$y = b\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

also wie im Kreise

$$0231 = bSdx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = b\Big(x$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x}{7}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots\Big) \text{ oder,}$$

wenn man anstatt der halben großen Achse 1

nach Nro 51. a setzet, $= \frac{b}{a}\Big(ax$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^3} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7a^5}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9a^7} - \ldots\ldots\ldots\ldots\Big).$$

In

In der Hyperbel, die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet, ist für die erste Achse = 2a und die zwote = 2b Fig. 99.

$$y = \frac{b}{a}\ (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\text{, also}$$

$$140 = \frac{b}{a}\ Sdx(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 7 Nro 81.

$$140 = \frac{b}{a}\left[\tfrac{1}{2}\,x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,a^2 \log\,(x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}})\right] + C$$

Die Fläche 140 wird = 0, da x = a wird. Dieser Fall giebt

$$0 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\,a^2 \log a + C\text{, und}$$

$$C = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\,a^2 \log a\text{, also}$$

$$140 = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}\,x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,a^2 \log a - \frac{1}{2}\,a^2 \log\,(x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}})\right]$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}\,x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,a^2 \log\left(\frac{a}{x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$$

für die gleichseitige Hyperbel ist a = b folglich

$$140 = \frac{1}{2}\,x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,a^2 \log\left(\frac{a}{x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Fig. 100. In der gleichseitigen Hyperbel an den Assympto-ten ist

$$y = \frac{a^2}{x}, \text{ also}$$

$$513406 = Sydx = S\frac{a^2dx}{x} + C$$

$$= a^2 \log x + C$$

Die Fläche 513406 wird = 0, wenn x = 0 ist. Dieser Fall giebt

$$0 = a^2 \log 0 + C, \text{ und}$$

$$C = - a^2 \log 0, \text{ also}$$

$$513406 = a^2 \log x - a^2 \log 0, \text{ oder}$$

$$513406 = a^2 \log \frac{x}{0} = \infty.$$

Diese Fläche 513406 läßt sich also nicht bestimmen.

Ist aber 0 der Krummen Scheitel, und man verlangt die Fläche 0234; so wird diese = 0, wenn x = a = 12 ist.

Dieser Fall giebt

$$0 = a^2 \log a + C, \text{ und}$$

$$C = - a^2 \log a, \text{ also}$$

$$0234 = a^2 \log x - a^2 \log a, \text{ oder}$$

$$0234 = a^2 \log \frac{x}{a}.$$

und, wenn a = 1 ist
$0234 = \log x.$

Nimmt

Nimmt man also 12 für 1 an; so wird jede Fläche 0234 dem Logarithme der Zahl, welche durch die Abscisse 13 ausgedrücket wird, gleich.

Ist z. B. 13 = 5; so wird (Nro 56) 0234 = 1.6094379

Ebendaher werden die Natürlichen Logarithmen auch **Hyperbolische** genennt.

Von der Rectification der Krummen.

89. Eine Krumme **rectificiren** heißt nichts anders als ihre Länge bestimmen.

Weil 13 = dx und 23 = dy ist; so wird 12 = $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ das Differenziale von 01, also Fig. 96.

$$01 = S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

In der Parabel ist

$$y = p^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \tfrac{1}{2}\, p^{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$dy^2 = \tfrac{1}{4}\, p\, x^{-1} dx^2, \text{ also}$$

$$01 = S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = S(dx^2 + \tfrac{1}{4} p x^{-1} dx^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S dx (1 + \tfrac{1}{4} p x^{-1})^{\frac{1}{2}} = S x^{-\frac{1}{2}} dx \left(x + \frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

also aus §. Nro 82.

$$= \frac{8}{p}\, x^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{p}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{p}\, S x^{\frac{1}{2}} dx \left(x + \frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es ist aber aus 9. Nro 81.

$$Sx^{\frac{1}{2}}dx\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{4}\left(2x+\frac{p}{4}\right)\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{p^2}{16}\log\left[x+\frac{p}{8}+\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

folglich

$$OI=\frac{8}{p}x^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{p}\left(2x+\frac{p}{4}\right)\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{p}{8}\log\left[x+\frac{p}{8}+\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{8}{p}x^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{p}{4}\right)-\frac{4}{p}\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(2x+\frac{p}{4}\right)+\frac{p}{8}\log\left[x+\frac{p}{8}+\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{8}{p}\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{p}{4}\right)-\frac{4}{p}\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{p}{4}\right)$$

$$+\frac{p}{8}\log\left[x+\frac{p}{8}+\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{8}{p}\left(x+\frac{p}{4}\right)-\frac{4}{p}\left(2x+\frac{p}{4}\right)\right]$$

$$+\frac{p}{8}\log\left[x+\frac{p}{8}+\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{p}{8}\log\left[x+\frac{p}{8}+\left(x^2+\frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+C.$$

Die

Die Krumme OI wird = o, da x = o ist. Dieser Fall giebt

$$o = \frac{p}{8} \log \frac{p}{8} + C \text{ und}$$

$$C = -\frac{p}{8} \log \frac{p}{8}, \text{ folglich}$$

$$OI = \left(x^2 + \frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{p}{8} \log \left[x + \frac{p}{8}\right.$$

$$\left. + \left(x^2 + \frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{p}{8} \log \frac{p}{8}$$

$$= \left(x^2 + \frac{px}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{p}{8} \log \left(1 + \frac{x + (x^2 + \frac{px}{4})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{8}p}\right)$$

Oder es ist $x = \frac{y^2}{p}$

$$dx = \frac{2ydy}{p}$$

$$dx^2 = \frac{4}{p^2} y^2 dy^2, \text{ also}$$

$$oI = S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = S\left(\frac{4}{p^2} y^2 dy^2 + dy^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{p} Sdy\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 7. Nro 81.

$$= \frac{y}{p}\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} p \log [y$$

$$+ (y^2 + \tfrac{1}{4} p^2)^{\frac{1}{2}}] + C.$$

Die Krumme OI wird = 0, wenn y = 0 ist. Dieser Fall giebt

$$0 = \frac{1}{4} p \log \frac{1}{2} p + C \text{ und}$$

$$C = -\frac{1}{4} p \log \frac{1}{2} p, \text{ folglich}$$

$$OI = \frac{y}{p}(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} p \log [y$$

$$+ (y^2 + \tfrac{1}{4} p^2)^{\frac{1}{2}}] - \tfrac{1}{4} p \log \tfrac{1}{2} p.$$

$$OI = \frac{y}{p}(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} p \log \left(\frac{y + (y^2 + \frac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}p}\right).$$

In dem Kreise ist für den Halbmesser 1, die Abscissen von dem Mittelpunkte an gerechnet,

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

folglich, weil y wächst, da x abnimmt,

$$dy = \frac{xdx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dy^2 = \frac{x^2dx^2}{1-x^2}, \text{ also}$$

Fig. 97. $OI = S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = S\left(dx^2 + \frac{x^2dx^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= Sdx\left(\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

also aus 2 Nro 78.

$$OI = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7}$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Oder

Oder für den Halbmesser a nach Nro 51.

$$oI = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3a^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^4}$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7a^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Weil die Krumme oI und x zu gleicher Zeit $= 0$ werden; so ist auch die Beständige $C = 0$.

In der Elipse ist für die große Achse $= 2$ und die kleine $= 2b$, die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet,

$$y = b(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{bxdx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{1 - x^2}, \text{ also}$$

$$oI = S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$ Fig. 98.

$$= S\left(dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\left(\frac{dx^2 - x^2dx^2 + b^2x^2dx^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Sdx\left(\frac{1 - x^2 + b^2x^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Sdx\left(\frac{1 - (1 - b^2)x^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und, wenn die Entfernung der Brennpunkte von dem Mittelpunkte $\sqrt{1 - b^2} = c$ ist,

$$OI = Sdx\left(\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 1. Nro 57.

$$OI = S\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}c^2 S\frac{x^2dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{1}{2.4}c^4 S\frac{x^4dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.3}{2.4.6}c^6 S\frac{x^6dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}c^8 S\frac{x^8dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots$$

Es ist aber aus 1. 2. 3. 4. Nro 82.

1tens $S\frac{x^2dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

2tens $S\frac{x^4dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4}x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$-\frac{3}{4.2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3.1}{4.2}Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

3tens $S\frac{x^6dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{6}x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$-\frac{5}{6.4}x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3}{6.4.2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{5.3.1}{6.4.2}Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

4tens $S \frac{x^8 dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{8} x^7 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$- \frac{7}{8.6} x^5 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{7.5}{8.6.4} x^3 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$- \frac{7.5.3}{8.6.4.2} x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Folglich

$$C1 = Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \Big(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2}$$

$$- \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots\ldots\ldots \Big)$$

$$+ c^2 x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{2^2} + \frac{3c^2}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2}$$

$$+ \frac{3^2.5^2.7c^6}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big)$$

$$+ c^4 x^3 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{2.4^2} + \frac{3.5c^2}{2.4^2.6^2}$$

$$+ \frac{3.5^2.7c^4}{2.4^2.6^2.8^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big)$$

$$+ c^6 x^5 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1.3}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5.7c^2}{2.4.6^2 8^2} + \ldots\ldots \Big)$$

$$+ c^8 x^7 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1.3.5}{2.4.6.8^2} + \ldots\ldots \Big)$$

Oder, weil x = 23 = 59 = Sin 45, also aus I. Nro 80.

$$Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 45 \text{ ist},$$

$$OI = 45\left(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots\ldots\right)$$

$$+ c^2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{3c^2}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2} + \frac{3^2.5^2.7c^6}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \ldots\ldots\right)$$

$$+ c^4x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2.4^2} + \frac{3.5.c^2}{2.4^2.6^2} + \frac{3.5^2.7c^4}{2.4^2.6^2.8^2} + \ldots\ldots\right)$$

$$+ c^6x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1.3}{2.4.6^2} + \frac{1.3.5.7c^2}{2.4.6^2.8^2} + \ldots\ldots\right)$$

$$+ c^8x^7(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8^2} + \ldots\ldots\right) + C$$

Nun werden OI, 45 und x zu gleicher Zeit $= 0$, folglich ist auch die Beständige $C = 0$.

Wird endlich $x = 28 = 1$; so wird $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, also

$$O18 = 458\left(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots\ldots\right)$$

Oder

oder

$$708 = 748\left(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots\ldots\right)$$

Für $b = \frac{3}{4}$ wird $c^2 = 1 - b^2 = \frac{7}{16}$ und
$708 = 748\,(1 - 0.1093 - 0.0089$
$- 0.0016 - 0.0003)$
$= \frac{22}{7} \times 0.8799 = 2.7654$

Für $b = \frac{1}{2}$ wird $c^2 = 1 - b^2 = \frac{3}{4}$ und
$708 = 748\,(1 - 0.1875 - 0.0263$
$- 0.0082 - 0.0034)$
$= \frac{22}{7} \times 0.7746 = 2.4344$

Für $b = \frac{1}{3}$ wird $c^2 = 1 - b^2 = \frac{8}{9}$ und
$708 = 748\,(1 - 0.2222 - 0.0370$
$- 0.0137 - 0.0066 -)$
$= \frac{22}{7} \times 0.7205 = 2.2644.$

Aus diesen Beyspielen läßt sich einsehen, daß man in der Ausübung für den halben Umfang 708 der Elipse gar wohl $2+b = 78+20$ nehmen kann.

In der Hyperbel ist für die erste Achse $= 2$ und die zwote $= 2b$, die Abscissen von dem Mittelpunkte an gerechnet,

$$y = b(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{bxdx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{x^2 - 1}, \text{ also}$$

Gl

Fig. 99. $OI = S(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = S\left(dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= Sdx\left(\frac{x^2 - 1 + b^2x^2}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Sdx\left(\frac{(1 + b^2)x^2 - 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und, wenn die Entfernung der Brennpunkte von dem Mittelpunkte $\sqrt{1 + b^2} = c$ ist,

$$= Sdx\left(\frac{c^2x^2 - 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 2 Nro 57.

$$OI = cS\frac{xdx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2c}S\frac{x^{-1}dx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{1}{2.4c^3}S\frac{x^{-3}dx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.3}{2.4.6c^5}S\frac{x^{-5}dx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8c^7}S\frac{x^{-7}dx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots$$

Es ist aber aus 5, 6, 7 Nro 82.

$$S\frac{x^{-3}dx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2}Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$S\frac{x^{-5}dx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2.4}x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2.4}x^{-4}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2.4}Sx^{-1}dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$S\frac{x^{-7}dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3.5}{2.4.6}\, x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{3.5}{2.4.6}\, x^{-4}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{3.5}{2.4.6}$$

$$x^{-6}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3.5}{2.4.6}\, Sx^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

aus 5 Nro 80.

$$S\frac{x^{-1}dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = Sx^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \text{Bog Kos}\ \frac{1}{x}$$

und nach Nro 74.

$$S\frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = Sxdx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

also

$$OI = c\,(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2c}\ \text{Bog Kos}\ \frac{1}{x}$$

$$- \frac{1}{2^2.4c^3}\, x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^2.4c^3}\ \text{Bog Kos}\ \frac{1}{x}$$

$$- \frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}\, x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}$$

$$x^{-4}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}\ \text{Bog Kos}\ \frac{1}{x}$$

$$- \frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7}\, x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2 8c^7}$$

$$x^{-4}(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{3^2 5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7}\, x^{-6}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2 8c^7}\ \text{Bog Kos}\ \frac{1}{x} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

oder

$$OI = c(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \text{Bog Kos}\,\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2c}\right.$$

$$+\frac{1}{2^2.4c^3}+\frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}+\frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7}$$

$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$-x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^2.4c^3}+\frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}\right.$$

$$\left.+\frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$-x^{-4}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$-x^{-6}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7}+\ldots\ldots\right)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C.$$

Nun wird $OI = 0$, da $x = 1$, also Bog Kos $\frac{1}{x} = 0$ ist. Dieser Fall giebt auch $C = 0$.

Beschreibt man auf der ersten Achse 70 einen Halbkreis 760 und macht

$$24 : 20 = 20 : 23$$

so wird $23 = \frac{1}{x}$, folglich $05 =$ Bog Kos $\frac{1}{x}$

und

und

$$01 = c\,(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - 05\left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{2^2.4c^3}\right.$$

$$\left. + \frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5} + \frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

$$- x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^2.4c^3} + \frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}\right.$$

$$\left. + \frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

$$- x^{-4}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3^2}{2^2.4^2.6c^5}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8c^7} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

$$- x^{-6}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2 8c^7} + \ldots\ldots \right)$$

Von der Berechnung der körperlichen Inhalte.

90. Wenn eine ebene Fläche 023 sich um die Achse 02 dreht; so beschreibt sie einen Körper 503, dessen Differenziale von jedem Trapeze 1234 erzeuget wird. Betrachtet man dieses Differenziale als einen gestutzten Kegel oder als einen Cylinder, und setzet 02 = x, 23 = y und das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange = 1 : g; so wird der Kreis von dem Halbmesser y = gy^2, also des Körpers Differenziale = gy^2dx, und der Körper selbst = Sgy^2dx. Fig. 101.

Ist z. B. 03 ein Kreisbogen; so wird

$$yy = ax - xx$$

also

also der Kugelabschnitt 5O3

$$= \int g dx (ax - x^2) = g\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

Denn der Körper 5O3 ist $= 0$, so bald $x = 0$ wird, folglich ist auch $C = 0$.

Für $x = a$ wird die ganze Kugel

$$= g\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{ga^3}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ga^3}{4}$$

$= \frac{2}{3}$ des ihr umschriebenen Cylinders.

Ist O3 eine Parabel; so wird $yy = px$, also die Paraboloide 5O3

$$= \int gpxdx = \frac{gpx^2}{2} = \frac{gy^2x}{2}$$

$= \frac{1}{2} \cdot gy^2x =$ der Hälfte des ihr umschriebenen Cylinders.

Ist O3 eine Elipse; so wird $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, also jeder Abschnitt 5O3 der Elipsoide

$$= \int \frac{gbbdx}{aa}(ax - xx) = \frac{gb^2}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

Denn der Körper 5O3 ist $= 0$, sobald $x = 0$ wird; folglich ist auch $C = 0$.

Für $x = a$ wird die ganze Elipsoide

$$= \frac{gb^2}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{gb^2a}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{gb^2a}{4}$$

$= \frac{2}{3}$ des ihr umschriebenen Cylinders.

Die-

Dieses gilt für die **länglichte** und **gedrückte** Elipsoide; indem 02 sowohl ein Theil der großen als der kleinen Achse seyn kann.

Ist 03 eine Hyperbel; so wird

$yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, also die Hyperboloide 503 =

$S\frac{gbbdx}{aa}(ax + xx) = \frac{gb^2}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$ = dem durch das Dreyeck 647 Fig. 102 beschriebenen Körper.

Denn es verhält sich $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = x : 47 = \frac{bx}{a}$,

also ist $27 = \frac{b}{2} + \frac{bx}{a}$, der Kreis von dem Halbmesser 27

$= g\left(\frac{b}{2} + \frac{bx}{a}\right)^2 = \frac{gb^2}{4} + \frac{gb^2x}{a} + \frac{gb^2x^2}{a^2}$,

der Kreis von dem Halbmesser 06 oder $24 = \frac{gb^2}{4}$

der Kegel 127

$= \left(\frac{gb^2}{4} + \frac{gb^2x}{a} + \frac{gb^2x^2}{a^2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{a}{6}\right)$

der Kegel $106 = \frac{agb^2}{24}$,

folglich der durch 647 beschriebene Körper

$$= \frac{gb^2x}{12} + \frac{gb^2x^2}{3a} + \frac{gb^2x^3}{3a^2} + \frac{agb^2}{24}$$

$$+ \frac{gb^2x}{6} + \frac{gb^2x^2}{6a} - \frac{agb^2}{24} - \frac{gb^2x}{4}$$

$$= \frac{gb^2x^2}{2a} + \frac{gb^2x^3}{3a^2} = \frac{gb^2}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Fig. 100. Dreht sich die gleichseitige Hyperbel 08 um ihre Assymptote 17, und man nimmt 12 = 20 = a; so wird $y = \frac{a^2}{x}$ und

$$yy = a^4 x^{-2}$$

also der durch das Viereck 0234 beschriebenen Körper

$$Sga^4x^{-2}dx = - ga^4x^{-1} + C$$

Dieser Körper wird = 0, wenn x = a ist, folglich ist

$$0 = - ga^3 + C \text{ und}$$

$$C = ga^3,$$

also der Körper $0234 = ga^3 - \frac{ga^4}{x}$

Für $x = \infty$, ist $\frac{ga^4}{x} = 0$, also der durch die bis ins Unendliche fortlaufende Fläche 8037 beschriebene Körper $= ga^3 =$ dem durch das Quadrat 0219 beschriebenen Cylinder.

Fig. 103. Fig. 104. Nimmt man die Höhe 01 eines Körpers 0123, welcher sich in eine Spitze 0 endiget, für die Abscissenlinie an; so ist jeder mit der Grundfläche gleichlaufende Schnitt 456 in dx multiplicirt das Differenziale desselben: Ist also t^2 der Inhalt des Schnittes 456; so wird jener des Körpers $0456 = St^2dx$; welcher sich allemal bestimmen läßt; so bald t^2 durch die Grundfläche 123 und x ausgedrückt werden kann.

Fig. 103. Ist von jeder Pyramide 0123 die Grundfläche $123 = b^2$ und die Höhe $01 = a$; so verhält sich

$$a^2 : x^2 = b^2 : t^2 = \frac{b^2x^2}{a^2},$$

al-

also ist der Körper 0456

$$= S\,\frac{b^2x^2dx}{a^2} = \frac{b^2x^3}{3a^2}$$

Denn für 0456 = 0, wird x = 0; also ist auch C = 0.

Für x = a wird 0456 $= \frac{b^2a}{3} =$ 0123.

Ist der Körper 0123 ein Abschnitt eines Viertelcylinders; so verhält sich $12^2 : 45^2 = b^2 : t^2$ oder

$$\frac{a^2}{4} : ax - xx = b^2 : t^2 = \frac{4b^2}{a^2}(ax - x^2)$$

also ist der Körper 0456

$$= \frac{4b^2}{a^2}\,Sdx(ax - x^2) = \frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

Für $x = \frac{a}{2}$ wird der Viertelcylinder 0123

$$= \frac{4b^2}{a^2}\left(\frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{24}\right) = \frac{ab^2}{3} = \frac{2b^2}{3}\cdot\frac{a}{2}$$

$= \frac{2}{3}$ der Grundfläche 123 multiplicirt in die Höhe 01.

Von der Berechnung der Oberflächen der durch die Flächenumdrehung entstandenen Körper.

91. Wenn die ebene Fläche 023 sich um die Achse 02 dreht; so beschreibt die Krumme 03 die Oberfläche des Körpers 503, 43 aber das Differenziale derselben. Fig. 101.

Dieses Differenziale kann allzeit als die Oberfläche eines gestutzten Kegels oder auch eines Cylinders, dessen

Höhe = 12 und seine Grundfläche der Kreis des Halbmessers 23 oder y ist. Daher wird dieses Differenziale $= 2gy\sqrt{dx^2 + dy^2}$, folglich die Oberfläche

$$503 = S2gy(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

In der Parabel ist

$$dx = \frac{2ydy}{p}$$

$$dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2};\text{ also}$$

$$503 = S2gy(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = S2gy\left(\frac{4y^2dy^2}{p^2} + dy^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{4gydy}{p}\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

folglich nach Nro 74.

$$= \frac{4g}{3p}\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Für die Oberfläche 503 = 0 wird auch $y = 0$, also

$$0 = \frac{4g}{3p} \cdot \frac{p^3}{8} + C \text{ und}$$

$$C = -\frac{gp^2}{6},$$

folglich die Oberfläche 503

$$= \frac{g}{6p}(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{gp^3}{6p}$$

$$= \frac{g}{6p}\left[(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right]$$

Rechnet man die Abscissen von dem Mittelpunkte an: so ist im Kreise für den Halbmesser a

$$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy^2 = \frac{x^2dx^2}{a^2 - x^2}$$

also die durch 38 beschriebene Zone 3578

$$= S2gy(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S2g(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\left(dx^2 + \frac{x^2dx^2}{a^2 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S2gdx(a^2 - x^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S2gadx = 2gax =$$

der Oberfläche des der Zone umschriebenen Cylinders; indem für die Zone $= 0$, $x = 0$ folglich auch $C = 0$ wird.

Für $x = a$ wird die Oberfläche $503 = 2ga^2$, der Oberfläche der Halbkugel oder zween grösten Kreisen gleich.

In der Elipse ist für die Umdrehungsachse $= 2a$, und die zwote $= 2b$, die Abscissen von dem Mittelpunkte an gerechnet,

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

also die durch 38 beschriebene Zone 3578

$$= S2gy(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{2gb}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\left(dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

 =

$$= S\frac{2gbdx}{a^2}\left[a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{2gbdx}{a^2}\left[a^4 - (a^2 - b^2)x^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ist nun 1tens $2a > 2b$; so ist für die Entfernung c der Brennpunkte von dem Mittelpunkte

$$c^2 = a^2 - b^2$$

also die Zone 3578 der länglichten Elipsoide

$$= S\frac{2gbdx}{a^2}(a^4 - c^2x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ oder}$$

$$= S2gbdx\left(1 - \frac{c^2x^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 9. Nro 80,

wenn man $\frac{cx}{a^2}$ anstatt x setzet, und folglich durch $\frac{cdx}{a^2}$ anstatt durch dx dividirt.

$$= \frac{\frac{gbcx}{a^2}\left(1 - \frac{c^2x^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}} + gb \text{ Bog Sin } \frac{cx}{a^2}}{\frac{c}{a^2}}.$$

$$= gbx\left(1 - \frac{c^2x^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{gba^2}{c} \text{ Bog Sin } \frac{cx}{a^2}$$

Denn für die Zone = 0, wird x = 0, also auch C = 0.

Für x = a wird die Oberfläche der halben länglichten Elipsoide

$$= gb(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{gba^2}{c} \text{ Bog Sin } \frac{c}{a}.$$

Ist

Ist 2tens $2b \geq 2a$; so ist $c^2 = b^2 - a^2$, also die durch 83 beschriebene Zone 3578 der gedrückten Elipsoide

$$= S\frac{2gbdx}{a^2}\left(a^4 + c^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{2gbcdx}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

folglich aus 7 Nro 81.

$$= \frac{gbcx}{a^2}\left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{gba^2}{c}\log\left[x\right.$$

$$\left. + \left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + C.$$

Für die Zone $= 0$ wird auch $x = 0$,

also $0 = \frac{gba^2}{c}\log\frac{a^2}{c} + C$

und $C = -\frac{gba^2}{c}\log\frac{a^2}{c}$,

folglich die Zone 3578

$$= \frac{gbcx}{a^2}\left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{gba^2}{c}\log\frac{c}{a^2}$$

$$\left[x + \left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{gbcx}{a^2}\left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{gba^2}{c}\log\left[\frac{cx}{a^2} + \left(\frac{c^2x^2}{a^4} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Für x = a wird die Oberfläche der halben gedrückten Elipsoide

$$= gb(c^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{gba^2}{c} \log \left[\frac{c}{a} + \left(\frac{c^2}{a^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= gb^2 + \frac{gba^2}{c} \log \left[\frac{c}{a} + \left(\frac{c^2}{a^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

In der Hyperbel ist für die Umdrehungsachse = 2a und die zwote = 2b, die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet,

$$y = \frac{b}{a}(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(x^2 - a^2)}$$

Folglich die Oberfläche 503 der Hyperboloide

$$= S2gy(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{2gb}{a}(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\left(dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(x^2 - a^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{2gbdx}{a^2}\left[a^2(x^2 - a^2) + b^2x^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{2gbdx}{a^2}\left[(a^2 + b^2)\,x^2 - a^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

also, weil für die Entfernung c der Brennpunkte von dem Mittelpunkte $c^2 = a^2 + b^2$ ist,

$$= S\frac{2gbdx}{a^2}(c^2x^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$= S\frac{2gbcdx}{a^2}\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

folg-

folglich aus 7. Nro 81.

$$= \frac{gbcx}{a^2}\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{gba^2}{c} \log \left[x + \left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + C$$

Für die Oberfläche = 0 wird $x = a$, also

$$0 = \frac{gbc}{a}\left(a^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{gba^2}{c} \log \left[a\right.$$

$$\left. + \left(a^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + C, \text{ oder}$$

$$0 = gb(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{gba^2}{c} \log \left[a\right.$$

$$\left. + \left(a^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + C, \text{ und}$$

$$C = - gb^2 + \frac{gba^2}{c} \log \left[a + \left(a^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Folglich ist die Oberfläche der Hyperboloide 503

$$= \frac{gbcx}{a^2}\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - gb^2$$

$$- \frac{gba^2}{c} \log \left(\frac{x + \left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{a + \left(a^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{gbcx}{a^2}\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - gb^2$$

$$- \frac{gba^2}{c} \log \left(\frac{cx + (c^2x^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}}{a(c+b)}\right)$$

Vom Integriren der Differenzialgrößen, welche mehrere Veränderlichen enthalten.

92. Multiplicirt man das Differenziale eines jeden Faktors in alle übrigen Faktoren; so ist die Summe dieser besondern Produkte das Differenziale des gegebenen Produktes Nro. 60. Folglich erhält man auch das Integrale eines gegebenen Differenzialproduktes, wenn man was immer für ein besonderes Produkt, dessen Faktor dx, dy, oder dz ist, so integrirt als wenn nur x, y oder z veränderlich wäre.

Ist z. B. das gegebene Differenziale

$$mx^{m-1}y^nz^rdx + nx^my^{n-1}z^rdy + rx^my^nz^{r-1}dz;$$

so findet man für das Integrale

1tens aus $mx^{m-1}y^nz^rdx$.

$$\frac{mx^my^nz^rdx}{mdx} = x^my^nz^r, \text{ oder}$$

2tens aus $nx^my^{n-1}z^rdy$,

$$\frac{nx^my^nz^rdy}{ndy} = x^my^nz^r, \text{ oder}$$

3tens aus $rx^my^nz^{r-1}dz$

$$\frac{rx^my^nz^rdz}{rdz} = x^my^nz^r$$

Differnnzirt man nun, was man durch dieses Verfahren erhalten hat, und zieht das gefundene Differenziale von dem gegebenen ab; so muß man noch, im Falle ein Rest bleibt, das Integrale von diesem suchen und nebst der Beständigen C zu dem zuvor gefunden addiren.

Weil

Weil im vorigen Beyspiele dieser Rest $=0$ ist; so wird das verlangte Integrale $= x^m y^n z^r + C$.

Ist das gegebene Differenziale

$$3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx;$$

so findet man aus $3x^2ydx + y^5dx$, für das Integrale

$$\frac{3x^3ydx}{3dx} + \frac{y^5xdx}{dx} = x^3y + xy^5$$

dessen Differenziale von dem gegebenen abgezogen o zum Reste giebt. Folglich ist das verlangte Integrale $x^3y + xy^5 + C$.

Ist das gegebene Differenziale $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$; so findet man aus $3x^2ydx + 2xzdx + xdx$ für das Integrale $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$, dessen Differenziale von dem gegebenen abgezogen y^2dy zum Reste giebt. Es ist aber $Sy^2dy = \frac{y^3}{3}$, folglich das verlangte Integrale $= x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$.

Nach eben dieser Methode werden auch die höhern Differenzialgrößen von mehreren Veränderlichen integrirt, indem die höhern Differenzen ddx, ddy, d^3x, d^3y selbst als eben so viel verschiedene Veränderlichen angesehen werden.

Ist z. B. das gegebene Differenziale $x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + (2x^2y + 3y^2x^2)dxdy + 2y^2xdx^2$, in welchem dx als beständig vorausgesetzet wird; so findet man aus x^3y^2ddy, indem man ddy allein als veränderlich ansieht, für das Integrale x^3y^2dy, dessen Differenziale $3x^2y^2dydx + 2x^3ydy^2 + x^3y^2ddy$ von dem

dem gegebenen abgezogen, $2x^2ydxdy + 2xy^2dx^2$ zum Reste giebt. Integrirt man ferner auch diesen Rest; so erhält man aus $2x^2ydxdy$, indem man y allein als veränderlich betrachtet, x^2y^2dx, dessen Differenziale für das beständige dx, $2xy^2dx^2 + 2x^2ydxdy$ von dem vorigen Reste abgezogen o übrig läßt.

Daher ist das verlangte Integrale $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$. Indem die beständige Cdx von der nämlichen Ordnung als das gefundene Integrale seyn muß.

Betrachtet man das Differenziale von $x^m y^n z^r$, das ist, $mx^{m-1}y^n z^r dx + nx^m y^{n-1} z^r dy + rx^m y^n z^{r-1} dz$ etwas genauer; so kann man leicht einsehen, daß man immer dasselbe erhält, wenn man den Koefficienten von dx differenzirt, indem man nur y oder nur z abändert und das gefundene Differenziale durch dy oder durch dz dividirt; oder wenn man den Koefficienten von dy oder von dz differenzirt, indem man nur x abändert und das gefundene Differenziale durch dx dividirt.

So wird

1tens $\dfrac{mnx^{m-1}y^{n-1}z^r dy}{dy} = \dfrac{mnx^{m-1}y^{n-1}z^r dx}{dx}$

2tens $\dfrac{mrx^{m-1}y^n z^{r-1} dz}{dz} = \dfrac{mrx^{m-1}y^n z^{r-1} dx}{dx}$

und eben so

3tens $\dfrac{nrx^m y^{n-1} z^{r-1} dz}{dz} = \dfrac{nrx^m y^{n-1} z^{r-1} dy}{dy}$.

Dieses ist die Eigenschaft, welche jedes gegebene Differenziale haben muß, wenn je dasselbe nach voriger Methode integrirt werden kann.

So

So läßt sich $\frac{y^3dx}{3} + xy^2dy$ integriren, weil $\frac{y^2dy}{dy}$ und $\frac{y^2dx}{dx}$ gleich sind. $xydx + 2xdy$ aber läßt sich nicht integriren, weil $\frac{xdy}{dy}$ und $\frac{2dx}{dx}$ ungleich sind.

Von den Differenzialgleichungen.

93. Eine Differenzialgleichung heißt von der **ersten, zwoten**, oder **dritten Ordnung**, je nachdem das höchste Differenziale von der **ersten, zwoten** oder **dritten Ordnung** ist.

Wenn das eine Glied einer Differenzialgleichung nur die Veränderlichen x und dx und das andere Glied nur die Veränderlichen y und dy enthält; so sagt man daß die Veränderlichen abgesöndert sind. Das Integrale einer solchen Gleichung wird gefunden, wenn man jedes Glied nach den schon bekannten Regeln integrirt.

Ist z. B. die gegebene Gleichung

$ax^my^ndx = by^qx^rdy$; so wird

$ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$, also

$$\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$$

Ist die Gleichung $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$; so wird

$a \log x = b \log y + \log C$

(indem man für die Beständige eben sowohl log C als C setzen kann)

$\log x^a = \log y^b + \log C$

$\log x^a = \log Cy^b$, also auch

$x^a = Cy^b$.

Ist

Ist $ax^m dx = \frac{bdy}{y}$; so wird

$$\frac{ax^{m+1}}{m+1} = b \log y + \log C$$

folglich, wenn h die Grundzahl der Logarithmen, also $\log h = 1$ ist,

$$\frac{ax^{m+1}}{m+1} \log h = b \log y + \log C$$

$$\log h^{\frac{ax^{m+1}}{m+1}} = \log Cy^b, \text{ also auch}$$

$$h^{\frac{ax^{m+1}}{m+1}} = Cy^b.$$

Sind die Gleichungen

$dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = ndy$

$- dx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = ndy$

$dx(1 + x^2)^{-1} = ndy$ oder

$- dx(1 + x^2)^{-1} = ndy$;

so wird aus 1, 2, 3, oder 4 Nro 80.

Bog Sin $x = ny + C$

Bog Kos $x = ny + C$

Bog Tang $x = ny + C$ oder

Bog Kot $x = ny + C$.

Es ist aber $x = \text{Sin Bog Sin } x$

$x = \text{Kos Bog Kos } x$

$x = \text{Tang Bog Tang } x$ oder

$x = \text{Kot Bog Kot } x$

also $x = \text{Sin } (ny + C)$

$x = \text{Kos } (ny + C)$

$x = \text{Tang } (ny + C)$ oder

$x = \text{Kot } (ny + C)$

Hier bedeutet $(ny + C)$ die wirkliche Länge eines Bogens von dem Halbmesser 1: will man lieber die Grade des Bogens haben; so darf man nur $ny + C$ durch die Länge von einem Grade, das ist, durch 0,0174533 dividiren oder, welches einerley ist, durch 57.2974166 multipliciren.

Hat eine Gleichung diese Gestalt

$$Adx + Bdy = 0$$

und es ist $\frac{d(A)}{dy}$ für ein beständiges x gleich $\frac{d(B)}{dx}$ für ein beständiges y; so wird ihr Integrale nach Nro 92. erhalten.

Wenn eine Gleichung

$$Adx + Bdy = 0$$

diese Eigenschaft nicht hat, aber doch gleichartig ist, das ist, wenn die Summe der Exponenten von x und y in jedem Ausdrucke dieselbe ist; so gelanget man zu ihrem Integrale, wenn man $\frac{y}{x} = z$ oder $\frac{x}{y}$ setzet.

Ist

Ist z. B. die gegebene Gleichung

$$y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = 0$$

in welcher die Summe der Exponenten von x und y in jedem Ausdrucke = 3 ist, und man setzt $\frac{y}{x} = z$; so wird

$$x = yz^{-1},\ dx = z^{-1}dy - yz^{-2}dz$$

und die Gleichung

$$y^3z^{-1}dy - y^4z^{-2}dz + y^3z^{-1}dy + by^3z^{-3}dy = 0$$

$$z^{-1}dy - yz^{-2}dz + z^{-1}dy + bz^{-3}dy = 0$$

$$dy - yz^{-1}dz + dy + bz^{-2}dy = 0$$

$$2dy - \frac{ydz}{z} + \frac{bdy}{z^2} = 0$$

$$2z^2dy - yzdz + bdy = 0$$

$$2z^2dy + bdy = yzdz$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{(2z^2+b)}.$$

$$\log y = \tfrac{1}{4}\log(2z^2 + b) + \log C$$

$$4\log y = \log(2z^2 + b) + \log C$$

$$\log y^4 = \log C(2z^2 + b)$$

$$y^4 = C(2z^2 + b),\ \text{also}$$

$$y^4 = C\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right).$$

Für die höheren Differenzialgleichungen befolget man die vorigen Regeln.

Ist

Ist z. B. die Gleichung

$$yddy + dy^2 + addy + dx^2 = 0,$$

in welcher dx beständig ist; so erhält man aus yddy + addy zum Integrale ydy + ady, dessen Differenziale $dy^2 + yddy + addy$ von dem gegebenen abgezogen $+ dx^2$ zum Reste läßt. Es ist aber für ein beständiges dx

$$Sdx^2 = xdx$$

also wird das verlangte Integrale

$$ydy + ady + xdx + Cdx = 0.$$

Davon ist das fernere Integrale

$$\tfrac{1}{2}y^2 + ay + \tfrac{1}{2}x^2 + Cx + C' = 0.$$

Ist die Gleichung für ein beständiges dx;

$$d^3y = ax^m dx^3 + bx^n dx^3$$

so findet man

1tens

$$ddy = \frac{ax^{m+1}dx^2}{m+1} + \frac{bx^{n+1}dx^2}{n+1} + Cdx^2$$

2tens

$$dy = \frac{ax^{m+2}dx}{(m+1)(m+2)} + \frac{bx^{n+2}dx}{(n+1)(n+2)}$$

$$+ Cxdx + C'dx \text{ und}$$

3tens

$$y = \frac{ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{bx^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \tfrac{1}{2}Cx^2 + C'x + C''.$$

Wenn eine Veränderliche x fehlt; so erhält man das Integrale, wenn man $\frac{dx}{dy} = z$ setzet.

Ist z. B. die Gleichung

$$yddy + dx^2 + dy^2 = 0 \text{ und}$$

man setzet $\frac{dx}{dy} = z$; so wird $dx = zdy$ und, weil dx beständig vorausgesetzet ist,

$$0 = dzdy + zddy$$

$ddy = -\frac{dzdy}{z}$, also die Gleichung

$$-\frac{ydzdy}{z} + z^2dy^2 + dy^2 = 0$$

$$z^2dy + dy = \frac{ydz}{z}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

folglich nach Nro 84.

$$\log y = \log z - \tfrac{1}{2} \log (z^2+1) + \log C$$

$$\log y - \log C = \log z - \log (z^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log \frac{y}{C} = \log \frac{z}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{y}{C} = \frac{z}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$zz = y^2 (C^2 - y^2)^{-1}$$

$$z = \pm y (C^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$zdy = \pm ydy (C^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ oder}$$

$$dx = \pm ydy (C^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ also}$$

$$x = \mp (C^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + C'.$$

Von

Von der umgekehrten Methode der Tangenten.

94. Diese Methode lehrt aus einer gegebenen Eigenschaft einer Krummen, die Gleichung derselben finden; und besteht darinn, daß man die gegebene Eigenschaft durch eine Differenzialgleichung ausdrückt, und sodann noch diese Gleichung integrirt.

Es sey z. B. die Gleichung der Krummen, deren Subtangente allzeit $\frac{4}{3}$ der Abscisse ist, zu finden?

Aus 1 Nro 66 ist also

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{4x}{3}$$

$$\frac{3dx}{x} = \frac{4dy}{y}$$

$$4 \log y = 3 \log x + \log C$$

$$\log y^4 = \log x^3 + \log C$$

$$y^4 = Cx^3$$

die Gleichung zur Parabel vom vierten Grade.

Soll die Subtangente $= 2x$ seyn; so wird

$$\frac{ydx}{dy} = 2x$$

$$\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$2 \log y = \log x + \log C$$

$$\log y^2 = \log Cx$$

$$y^2 = Cx$$

die Gleichung der gemeinen Parabel.

Suche die Gleichung der Krummen, deren Subtangente beständig $= \frac{aa+xx}{x}$ ist?

Es ist also $\frac{ydx}{dy} = \frac{aa+xx}{x}$

$\frac{dy}{y} = xdx(a^2 + x^2)^{-1}$

$\log y = \frac{1}{2} \log (a^2 + x^2) + \log C$

$\log y = \log (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \log C$

$\log y = \log C (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y = C (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

Da C nach Nro 51. nur ein Verhältniß bedeuten kann; so wird, wenn $C = \frac{b}{a}$ ist,

$$y = \frac{b}{a} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ also}$$

$$yy = \frac{b^2}{a^2} (a^2 + x^2), \text{ die Gleichung zur Hyperbel.}$$

Fig. 105. Suche die Gleichung der Krummen 01, welche so beschaffen ist, daß die Fläche 012 allzeit $= \frac{3}{2}$ von der Fläche 013 ist.

Nach Nro 88 ist

$012 = Sydx$ und

$013 = Sxdy$, also

$Sydx = \frac{3}{2} Sxdy$

$2Sydx = 3Sxdy$

2ydx

$$2ydx = 3xdy$$

$$\frac{3dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$3 \log y = 2 \log x + \log C$$

$$\log y^3 = \log Cx^2$$

$$y^3 = Cx^2$$

die Gleichung der Parabel vom 3ten Grade.

Suche endlich die Gleichung der Krummen, deren Krümmungshalbmesser beständig $\frac{m}{n}$ der Normale gleich ist.

Nach Nro 68 und 66 ist also

$$-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy} = \frac{my}{ndx}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{m}{n}y = -\frac{(dx^2+dy^2)}{ddy} \text{ oder}$$

$$\frac{m}{n}yddy + dx^2 + dy^2 = 0$$

Woraus man, wie im letzten Beyspiele des vorigen Nro 93.

$$dx = \pm y^{\frac{n}{m}} dy(C^{\frac{2n}{m}} - y^{\frac{2n}{m}})^{-\frac{1}{2}}$$

für die Differenzialgleichung der ersten Ordnung findet.

Setzet man $m = n$; so wird $dx = \pm ydy (C^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $x = \mp (C^2-y^2)^{\frac{1}{2}} + C'$ die Gleichung zu dem Kreise.

Von der sphärischen Trigonometrie.

Fig. 106. 95. Man nehme in der Oberfläche einer Kugel drey Punkte a, b und d so an, daß nicht alle drey in einem und demselben größten Kreise liegen, und führe durch jede zween und der Kugel Mittelpunkt, die Ebenen acb, acd und bcd; so entstehen in der Kugel Oberfläche die sphärischen Dreyecke adb, adf, edb und edf.

Jede Seite ab des Dreyeckes adb ist das Maß des Winkels acb am Mittelpunkte c, und jeder Winkel desselben bad ist nichts anders als der Winkel, welchen die Ebenen bac und dac in ihrem Durchschnitte ac machen.

96. Wird die Seite ab und der Winkel adb größer und endlich = 180°, da b in e kömmt; so befinden sich die drey Punkte a, d und b in einem und demselben größten Kreise ade.

Daher ist jede Seite ab und jeder Winkel adb eines sphärischen Dreyeckes kleiner als 180°.

97. Wäre die Summe der Winkel bcd und acd kleiner als acb; so könnten jene an die Schenkel bc und ac gelegt einander nie in einem gemeinen Schenkel dc erreichen: und wäre ihre Summe dem Winkel acb gleich: so müßten sie acb decken, und der Punkt d in dem größten Kreise abe liegen.

Daher ist jede Seite ab eines Dreyeckes abd allemal kleiner als die Summe der zwo andern ad und bd.

98. Führt man durch die 3 Scheitel eines sphäri- Fig. 107.
schen Dreyeckes eine Ebene abd; so entsteht eine Dreyseitige Pyramide, welche diese Ebene zur Grundfläche und den Mittelpunkt c zur Spitze hat. Und beschreibt man aus der Spitze c einer dreyseitigen Pyramide cabd in ihren Seitenflächen mit einem beliebigen aber demselben Halbmesser die Bögen ab, ad und bd; so erhält man allemal ein sphärisches Dreyeck adb.

Was sich also von den Winkeln der Seiten einer Dreyseitigen Pyramide und von den Winkeln ihrer Seitenflächen sagen läßt, das gilt auch von den Seiten eines sphärischen Dreyeckes und von seinen Winkeln.

99. Ist co senkrecht auf die Ebene abd, und wird Fig. 108.
größer oder kleiner, unendlich groß oder unendlich klein; so werden 1tens die Winkel der Seiten acb, acd und bcd kleiner oder größer, unendlich klein oder gleich aob, aod und bod; und 2tens die Winkel der Seitenflächen kleiner oder größer, gleich den Winkeln bad, bda und abd, in dem die Seiten ac, dc und bc der Pyramide auf die Ebene abd senkrecht werden, oder endlich ein jeder aus diesen Winkeln = 180°, indem die Seitenflächen acb, acd und bcd mit aob, aod und bod übereinkommen und jede zwo in eine und dieselbe Ebene abd fallen. Sobald aber co unendlich groß oder unendlich klein wird; so ist keine Pyramide also auch kein sphärisches Dreyeck mehr vorhanden.

Daher befindet sich die Summe der drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes allzeit zwischen 0° und 4 rechten Winkeln, die Summe seiner drey Winkel aber zwischen 2 und 6 rechten Winkeln.

Fig. 109. 100. Es sey ab kleiner als be und die Ebene abe senkrecht auf aqe. Nun ist aq = 90°, so wird die Ebene bcq senkrecht auf die Ebene abe, also qba = qbe = 90°; oder ist qba = 90°, so wird die Ebene bcq abermal senkrecht auf die Ebene abe also aq = 90°.

Jedesmal sind die Bögen ba und be die Maße der Winkel bca und bce, welche die Ebene bcq mit der Ebene aqe in ihrem Durchschnitte cq macht, also die Maße der Winkel bqa und bqe.

Zieht man ferner bn senkrecht auf ae und nm senkrecht auf dg; so ist die Ebene bnm senkrecht auf aqe, folglich auch senkrecht auf dg, also bmn der Winkel, den die Ebene dbg mit der Ebene dag in ihrem Durchschnitte dg macht; folglich der Winkel bmn = bda = bga, endlich ist wegen des rechten Winkels nmc, nm kleiner als nc, also wegen der beyn rechtwinklichten Dreyecke der Winkel bmn kleiner als 90° und größer als bcn. Folglich sind auch in den sphärischen bey a und e rechtwinklichten Dreyecken die Winkel bda oder bga kleiner als 90° und größer als bqa oder ba und ihre Nebenwinkel bde oder bge größer als 90° und kleiner als bqe oder be.

Daher wird 1tens in einem rechtwinklichten Dreyecke jede Kathede und ihr entgegengesetzter Winkel zugleicher Zeit 90° und in diesem Falle die andere Kathede das Maß des andern Winkels, 2tens kömmt jeder Winkel dem rechten näher als seine entgegengesetzte Kathede und 3tens sind jeder Winkel und seine entgegengesetzte Kathede von derselben Art (beede spitz oder beede stumpf).

101. Es sey wieder die Ebene abe senkrecht auf die Ebene ade, und ba kleiner als be; so wird, weil ba, bd und be = bca, bcd und bce sind, die Hypothenuse bd nach Nro. 135. Meßk. größer als ba und kleiner als be, spitz, recht, oder stumpf, je nachdem in dem Dreyecke bad die Kathede ad ebenfalls spitz, recht, oder stumpf, also in dem Dreyecke bed die Kathede ed im Gegentheile stumpf, recht, oder spitz wird. Fig. 110.

Die Hypothenuse bd ist also in jedem Dreyecke bad und bed spitz, recht oder stumpf, je nachdem beede Katheden spitz oder beede stumpf, eine = 90°, oder eine spitz und die andere stumpf ist. Jeder Winkel aber ist nach Vorigem zugleich mit der entgegengesetzten Kathede spitz, recht, oder stumpf.

Daher nähert sich 1tens die Hypothenuse dem rechten Winkel mehr als jede Kathede 2tens wird die Hypothenuse = 90°, so bald eine Kathede, oder ein einer Kathede entgegengesezter Winkel = 90° wird, 3tens ist die Hypothenuse spitz oder stumpf, je nachdem die beeden Katheden, die beeden Winkel, oder eine Kathede und ihr anliegender Winkel von derselben oder von verschiedener Art sind.

Wenn in einem Dreyecke 2 Winkel = 90° sind, so sind es auch noch Vorigem ihre entgegengesetzten Seiten, und umgekehrt; in jedem Falle ist die 3te Seite das Maß des 3ten Winkels; sind also alle 3 Winkel = 90°; so sind es auch alle 3 Seiten und umgekehrt. Es bleibt also nur noch die Auflösung des Dreyeckes, welches nur einen rechten Winkel hat, zu suchen übrig.

Von den rechtwinklichten Dreyecken.

Fig. 111. 102. Da in dem bey a rechtwinklichten Dreyecke bad, die Seiten ba, ad und bd die Maße der Winkel bca, acd und bcd sind; so verhält sich wegen der bey m und n rechtwinklichten Dreyecke bmc und bnc, und des gemeinen Halbmessers bc,

bm : bn = Sin bcm : Sin bcn, oder

bm : bn = Sin bd : Sin ab

und wegen des bey n rechtwinklichten Dreyeckes bnm

bm : bn = Halbm : Sin bmn oder

bm : bn = Halbm : Sin bda, also

Halbm : Sin bda = Sin bd : Sin ab.

Oder die 1te Proportion.

Der Halbmesser zum Sinus eines Winkels wie der Sinus der Hypothenuse zum Sinus der entgegengesetzten Kathede.

Wegen der bey m rechtwinklichten Dreyecke bmc und nmc und des gemeinen Halbmessers mc verhält sich

bm : nm = Tang bcm : Tang ncm oder

bm : nm = Tang bd : Tang ad

Und wegen des bey n rechtwinklichten Dreyeckes bnm

bm : nm = Halbm : Kos bmn oder

bm : nm = Halbm : Kos. bda also

Halbm : Kos bda = Tang bd : Tang ad.

Oder

Oder die 2te Proportion.

Der Halbmesser zum Kosinus eines Winkels wie die Tangente der Hypothenuse zur Tangente der anliegenden Kathede.

Wegen der bey m und n rechtwinklichten Dreyecke nmc und bnc, und des gemeinen Halbmessers cn verhält sich

mn : bn = Sin ncm : Tang bcn oder

mn : bn = Sin ad : Tang ab

und wegen des bey n rechtwinklichten Dreyeckes bnm

mn : bn = Halbm : Tang bmn oder

mn : bn = Halbm : Tang bda, also

Halbm : Tang bda = Sin ad : Tang ab.

Oder die 3te Proportion.

Der Halbmesser zur Tangente eines Winkels wie der Sinus der anliegenden Kathede zur Tangente der entgegengesetzten Kathede.

Nimmt man nun do und dr = 90°, und führt durch o und r einen größten Kreis ors; so ist do und dr senkrecht auf So, Sa und So senkrecht auf do, also auch Sa und So = 90°.

In dem bey r rechtwinklichten Dreyecke srb verhält sich nach der ersten Proportion

Halbm : Sin bsr = Sin bs : Sin br.

Es ist aber Sin bsr = Sin ao = Kos ad,

Sin bs = Kos ab und

Sin br = Kos bd, also

Halbm : Kos ad = Kos ab : Kos bd.

Oder die 4te Proportion.

Der Halbmesser zum Kosinus einer Kathede wie der Kosinus der andern Kathede zu dem Kosinus der Hypothenuse.

Nach der ersten Proportion verhält sich ferner

Halbm : Sin sbr = Sin bs : Sin sr.

Es ist aber Sin sbr = Sin abd

Sin bs = Kos ab und

Sin sr = Kos ro = Kos adb, also

Halbm : Sin abd = Kos ab : Kos adb.

Oder die 5te Proportion.

Der Halbmesser zum Sinus eines Winkels wie der Kosinus der anliegenden Kathede zu dem Kosinus des andern Winkels.

Endlich verhält sich nach der 3ten Proportion.

Halbm : Tang sbr = Sin br : Tang rs.

Es ist aber Tang sbr = Tang abd

Sin br = Kos bd und

Tang rs = Kot ro = Kot adb, also

Halbm : Tang abd = Kos bd : Kot adb.

Oder die 6te Proportion.

Der Halbmesser zur Tangente eines Winkels wie der Kosinus der Hypothenuse zur Kotangente des andern Winkels.

Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.

103. Ist 1tens die Hypothenuse bd nebst einer Kathede ab gegeben; so giebt die 1te Proportion den entgegengesetzten Winkel d mit ab von derselben Art; die 2te Proportion den Winkel b mit ab von derselben oder von verschiedener Art, je nachdem bd spitz oder stumpf ist; und die 4te Proportion die Kathede ad mit b von derselben Art.

Ist 2tens die Hypothenuse bd nebst einem Winkel b bekannt; so giebt die 1te Proportion die Kathede ad mit b von derselben Art; die 2te Proportion die Kathede ab mit b von derselben oder von verschiedener Art, je nachdem bd spitz oder stumpf ist; und die 6te Proportion den Winkel d mit ab von derselben Art.

Ist 3tens eine Kathede ab und der anliegende Winkel b gegeben; so giebt die 5te Proportion den Winkel d mit ab von derselben Art; die 3te Proportion die Kathede ad mit b von derselben Art; und die 2te Proportion die Hypothenuse bd spitz oder stumpf, je nachdem ab und b von derselben oder von verschiedener Art sind.

Giebt man 4tens eine Kathede ab nebst dem entgegengesetzten Winkel d; so wird aus der 3ten Proportion die Kathede ad, aus der 5ten Proportion der Winkel b, und aus der 1ten Proportion die Hypothenuse bd, jedes sowohl spitz als stumpf gefunden.

Kennet man 5tens die beeden Katheden ab und ad; so giebt die 3te Proportion den Winkel d mit ab und den Winkel b mit ad von derselben Art; und die 4te Proportion die Hypothenuse bd spitz oder stumpf, je nachdem ab und ad von derselben oder von verschiedener Art sind.

Sind

Sind endlich 6tens die beeden Winkel b und d gegeben; so erhält man aus der 5ten Proportion die Kathede ab mit d und die Kathede ad mit b von derselben Art; und aus der 6ten Proportion die Hypothenuse bd spitz oder stumpf, je nachdem b und d von derselben oder von verschiedener Art sind.

Ist bey der ersten Aufgabe die Hypothenuse bd mehr als die gegebene Kathede ab, bey der vierten Aufgabe der gegebene Winkel d mehr als die entgegengesetzte Kathede ab von 90° entfernt; oder macht bey der 6ten Aufgabe die Summe der gegebenen Winkel b und d nicht mehr als 90° aus; so ist die Aufgabe nach Nro 101, 100, oder 99 unmöglich, sonst ist sie allzeit möglich, wenn nur jedes gegebene Stück nach Nro 96 weniger als 180° beträgt.

Von den schiefwinklichten Dreyecken.

Fig. 112. 104. Nimmt man in jedem schiefwinklichten Dreyecke abd die Seite ad für die Grundlinie an, und führt auf ihre Ebene durch den Scheitel b und der Kugel Mittelpunkt einen senkrechten Kreis obe: so fällt nach Nro 100 die Senkrechte be oder bo inner das Dreyeck abd, mbn, oder ausser dasselbe abm, dbn, je nachdem die Winkel an der Grundlinie von derselben oder von verschiedener Art sind.

In jedem Falle heißen die Bögen der Grundlinie, oder die Winkel an der Spitze, welche zwischen der Senkrechten und jeder Seite begriffen sind, Abschnitte der Grundlinie oder des Winkels an der Spitze.

So sind in dem Dreyecke abd, ea und ed die Abschnitte der Grundlinie ad, ebd und eba die Abschnitte des Winkels abd; und in dem Dreyecke abm, ea und em die Abschnitte der Grundlinie am, eba und ebm die Abschnitte des Winkels abm.

105.

105. Wegen der bey e rechtwinklichten Dreyecke bea und bed verhält sich nach der 1ten Proportion.

Halbm : Sin bae = Sin ab : Sin be und

Halbm : Sin bde = Sin bd : Sin be also

Sin ab : Sin bd = Sin bde : Sin bae.

Oder die 7te Proportion.

Die Sinus der Seiten wie die Sinus der entgegengesetzten Winkel.

Nach der 2ten Proportion verhält sich

Halbm : Kos abe = Tang ab : Tang be, und

Halbm : Kos dbe = Tang bd : Tang be, also

Tang ab : Tang bd = Kos dbe : Kos abe.

Oder die 8te Proportion.

Die Tangente der Seiten verhalten sich verkehrt wie die Kosinus der anliegenden Abschnitte des Winkels an der Spitze.

Nach der 3ten Proportion verhält sich

Halbm : Tang bae = Sin ae : Tang be, und

Halbm : Tang bde = Sin de : Tang be, also

Sin ae : Sin de = Tang bde : Tang bae.

Oder die 9te Proportion.

Die Sinus der Abschnitte der Grundlinie verhalten sich verkehrt wie die Tangenten der anliegenden Winkel.

Nach

Nach der 4ten Proportion verhält sich

Halbm : Kos be = Kos ae : Kos ab, und

Halbm : Kos be = Kos de : Kos bd, also

Kos ae : Kos de = Kos ab : Kos bd.

Oder die 10te Proportion

Die Kosinus der Abschnitte der Grundlinie verhalten sich wie die Kosinus der anliegenden Seiten.

Nach der 5ten Proportion verhält sich

Halbm : Sin abe = Kos be : Kos bae, und

Halbm : Sin dbe = Kos be : Kos bde, also

Sin abe : Sin dbe = Kos bae : Kos bde.

Oder die 11te Proportion.

Die Sinus der Abschnitte des Winkels an der Spize verhalten sich wie die Kosinus der anliegenden Winkel.

Da in jedem ebenen Dreyecke die Seiten sich verhalten wie die Sinus der entgegengesetzten Winkel; so verhält sich auch nach Nro 406 Meßk. Die Summe der Sinus jeder zween Winkel **A** und **B** zu ihrem Unterscheide wie die Tangente der halben Summe dieser Winkel zur Tangente ihres halben Unterscheides. Es macht aber allzeit die halbe Summe $\frac{A+B}{2}$ dieser Winkel mit der halben Summe $\frac{90-A+90-B}{2}$ ihrer Komplemente 90° aus; und der halbe Unterscheid $\frac{A-B}{2}$ eben dieser Winkel ist dem halben Unterscheide $\frac{90-B-(90-A)}{2}$ ihrer Komplemente gleich.

Folg.

Folglich verhält sich auch die Summe der Kosinus jeder zween Winkel 90—A und 90—B zu ihrem Unterscheide, wie die Kotangente der halben Summe eben dieser Winkel zur Tangente ihres halben Unterscheides.

Nach der 10ten Proportion verhält sich ferner: die Summe der Kosinus der Abschnitte der Grundlinie zu ihrem halben Unterschied, wie die Summe der Kosinus der anliegenden Seiten zu ihrem halben Unterscheide, also auch die Kotangente der halben Summe der Abschnitte der Grundlinie zur Tangente ihres halben Unterscheides wie die Kotangente der halben Summe der Seiten zur Tangente ihres halben Unterscheides.

Da endlich das Rechteck aus der Tangente und Kotangente dem Quadrate des Halbmessers gleich ist; so verhalten sich jede zwo Tangenten verkehrt wie ihre Kotangenten. Setzt man also anstatt des Verhältnisses der Kotangenten das verkehrte der Tangenten; so erhält man

Die 12 Proportion.

Die Tangente der halben Grundlinie zur Tangente der halben Summe der Seiten, wie die Tangente des halben Unterscheides der Seiten zur Tangente des halben Unterscheides der Abschnitte der Grundlinie.

Nach der 11ten Proportion verhält sich die Summe der Sinus der Abschnitte des Winkel an der Spitze zu ihrem Unterscheide, wie die Summe der Kosinus der anliegenden Winkel zu ihrem Unterscheide. Daher

Die 13 Proportion.

Die Tangente der halben Summe der Abschnitte des Winkels an der Spitze zur Tangente ihres halben Unterscheides, wie die Kotan-

gente der halben Summe der zween übrigen Winkel zur Tangente ihres halben Unterscheides.

Auflösung der schiefwinklichten Dreyecke.

106. Sind 1tens zwo Seiten ab und ad nebst dem eingeschlossenen Winkel a gegeben, und man setzet be senkrecht auf ad; so findet man aus ab und a nach der 2ten Prop. den Abschnitt ae; aus ab, ae und ed nach der 10ten Prop. bd spitz oder stumpf, nachdem ed und a von derselben oder von verschiedener Art sind, endlich aus ae, ed und a nach der 9ten Prop. den Winkel d mit a von derselben oder von verschiedener Art, nachdem ae kleiner oder größer als ad ist. Sucht man noch durch die bey e rechtwinklichte Dreyecke die Abschnitte abe und dbe; so giebt dbe zu abe addirt oder von abe abgezogen, nachdem ae kleiner oder größer als ad ist den Winkel abd.

Sind 2tens zwo Seiten ab und bd nebst dem Winkel a, welcher einer entgegensteht, gegeben; so erhält man den Abschnitt ae wie zuvor; sodann durch ab, bd und ae nach der 10ten Prop. den Abschnitt de mit a von derselben oder verschiedener Art, nachdem bd spitz oder stumpf ist. Endlich giebt de zu ae addirt oder von ae abgezogen zween Werthe für ad. Der erste muß kleiner als 180°, und der andere größer als 0° seyn. Ein solches Dreyeck hat also zwo, nur eine oder keine Auflösung, nachdem die beeden Werthe von ad, nur einer, oder keiner mit dieser Anmerkung übereinstimmt. Für jedes gefundene ad erhält man die Winkel d und b wie bey der vorigen Aufgabe.

Ist 3tens eine Seite ab nebst den zween anliegenden Winkeln a und b gegeben; so erhält man aus ab und a nach der 6ten Prop. den Abschnitt abe; sodann

aus

aus abe, dbe und a nach der 11ten Prop. den Winkel d mit a von derselben oder verschiedener Art, nachdem abe kleiner oder größer als abd gefunden worden ist. Endlich giebt die 8te Proportion aus abe, dbe und ab die Seite bd spitz oder stumpf, nachdem dbe mit a von derselben oder verschiedene Art ist. Sucht man noch durch die bey e rechtwinklichten Dreyecke ae und ed; so giebt ed zu ae addirt oder von ae abgezogen, nachdem abe kleiner oder größer als abd ist, die Seite ad.

Ist 4tens eine Seite ab, ein anliegender Winkel a und der entgegengesetzte, d gegeben; so erhält man den Abschnitt abe wie zuvor; sodann aus a, d und abe nach der 11ten Proportion den Abschnitt dbe, welcher spitz sowohl als stumpf genommen zu abe addirt, wenn d und a von derselben Art sind, oder von abe abgezogen wenn d und a von verschiedener Art sind, zween Werthe für den Winkel abd giebt. Ein solches Dreyeck hat also zwo Auflösungen, nur eine oder keine, nachdem im erstem Falle beede Summen, nur eine oder keine unter 180°, und im 2ten Falle beede Unterscheide, nur einer oder keiner über 0° ist. Für jeden Winkel abd findet man noch die Seiten bd und ad wie bey der vorigen Aufgabe.

Sind 5tens alle 3 Seiten ab, ad und bd gegeben; so findet man aus der halben Grundlinie ad, und den Seiten ab und bd nach der 12 Proportion den halben Unterscheid der Abschnitte ae und de, welcher spitz genommen zur halben Grundlinie addirt und davon abgezogen die beeden Abschnitte ae und de giebt. Nachdem der größere Abschnitt ae mehr oder weniger als der kleinere de von 90° absteht; so liegt er vermög der 10ten Proportion an jener Seite ab, welche ebenfalls mehr oder weniger als bd von 90° entfernet ist. Endlich erhält man durch den größern Abschnitt ae und seine anliegende Seite ab nach der 2ten Proportion den

Win-

Winkel a; und sodann die übrigen b und d wie bey der ersten Aufgabe.

Sind 6tens alle 3 Winkel gegeben; so findet man aus a, d und dem halben Winkel abd nach der 13 Prop. den halben Unterscheid der Abschnitte abe und dbe, welcher spitz genommen zu dem halben Winkel abd addirt und davon abgezogen die Abschnitte abe und dbe giebt. Nachdem der größere Abschnitt abe mehr oder weniger als der kleinere dbe von 90° absteht; so liegt er vermög der 11ten Proportion an jenem Winkel a, welcher im Gegentheile weniger oder mehr als der andern d von 90° abweicht. Endlich erhält man aus a und abe nach der 6ten Proportion die Seite ab. Die übrigen Seiten ad und bd werden wie bey der 3ten Aufgabe gefunden.

Diese Lehre dient allenthalben, wo von der Lage der Ebenen die Frage ist; vorzüglich wird sie in der Astronomie gebraucht. In der Meßkunst werden die in schiefen Ebenen beobachteten Winkel nach eben dieser Lehre auf den Horizont berechnet.

Fig. 113. Denn ist nx die Vertikallinie, AnB der horizontale und anb der ausser dem Horizonte beobachtete Winkel, und man mißt die Höhenwinkel bnB und anA; so geben diese mit den Quadranten xB und xA die Bögen bx und ax, welche mit dem beobachteten ab die drey Seiten des sphärischen Dreyeckes axb ausmachen, woraus nach der 5ten Aufgabe der Winkel axb = AnB gefunden wird.

Ende des dritten Theiles.

Kreis- und Stadt-Kernerische Stiftungsbibliothek Augsburg

Taf. I

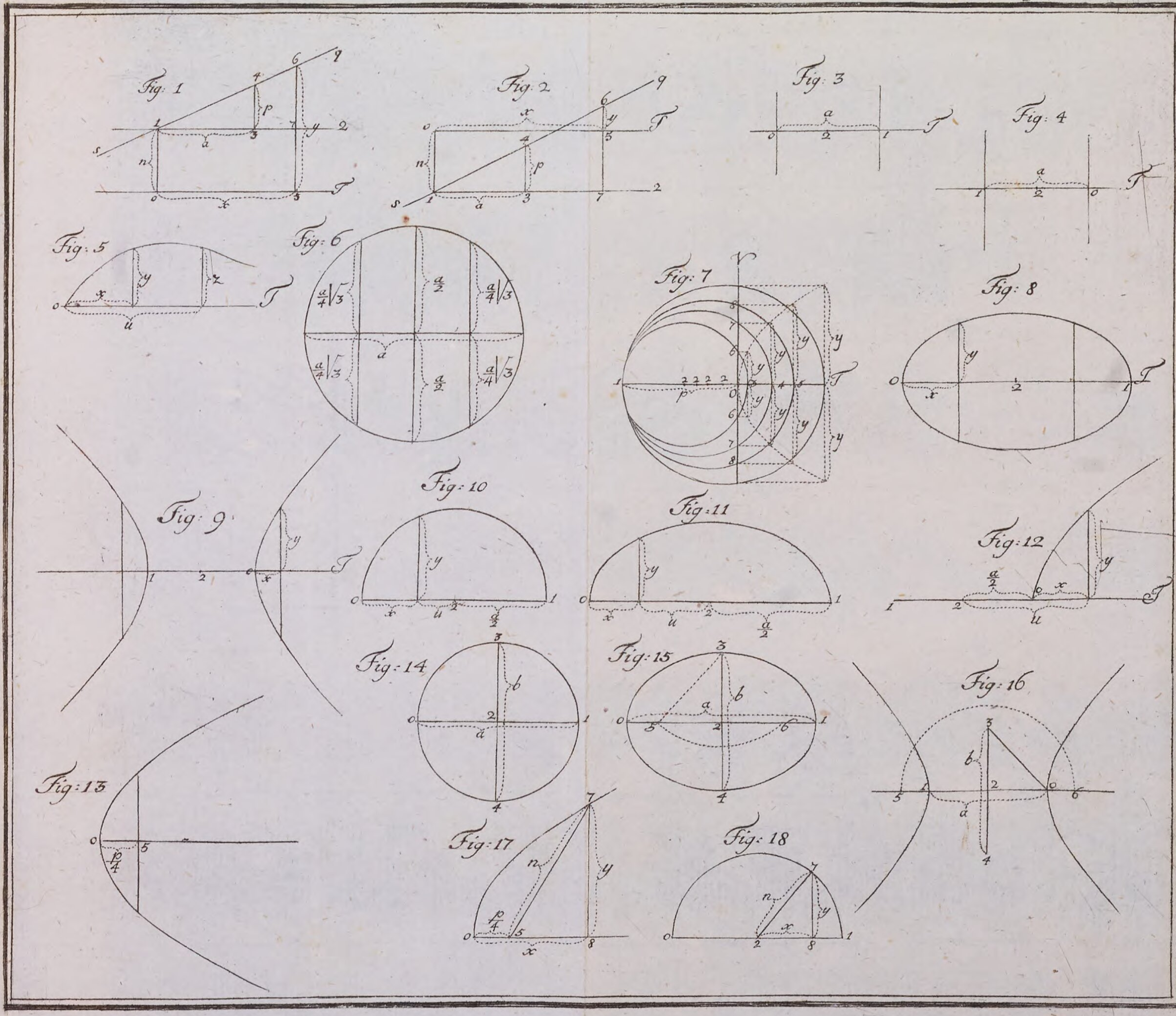


Fig: 1
Fig: 2
Fig: 3
Fig: 4
Fig: 5
Fig: 6
Fig: 7
Fig: 8
Fig: 9
Fig: 10
Fig: 11
Fig: 12
Fig: 13
Fig: 14
Fig: 15
Fig: 16
Fig: 17
Fig: 18

Tafel. II

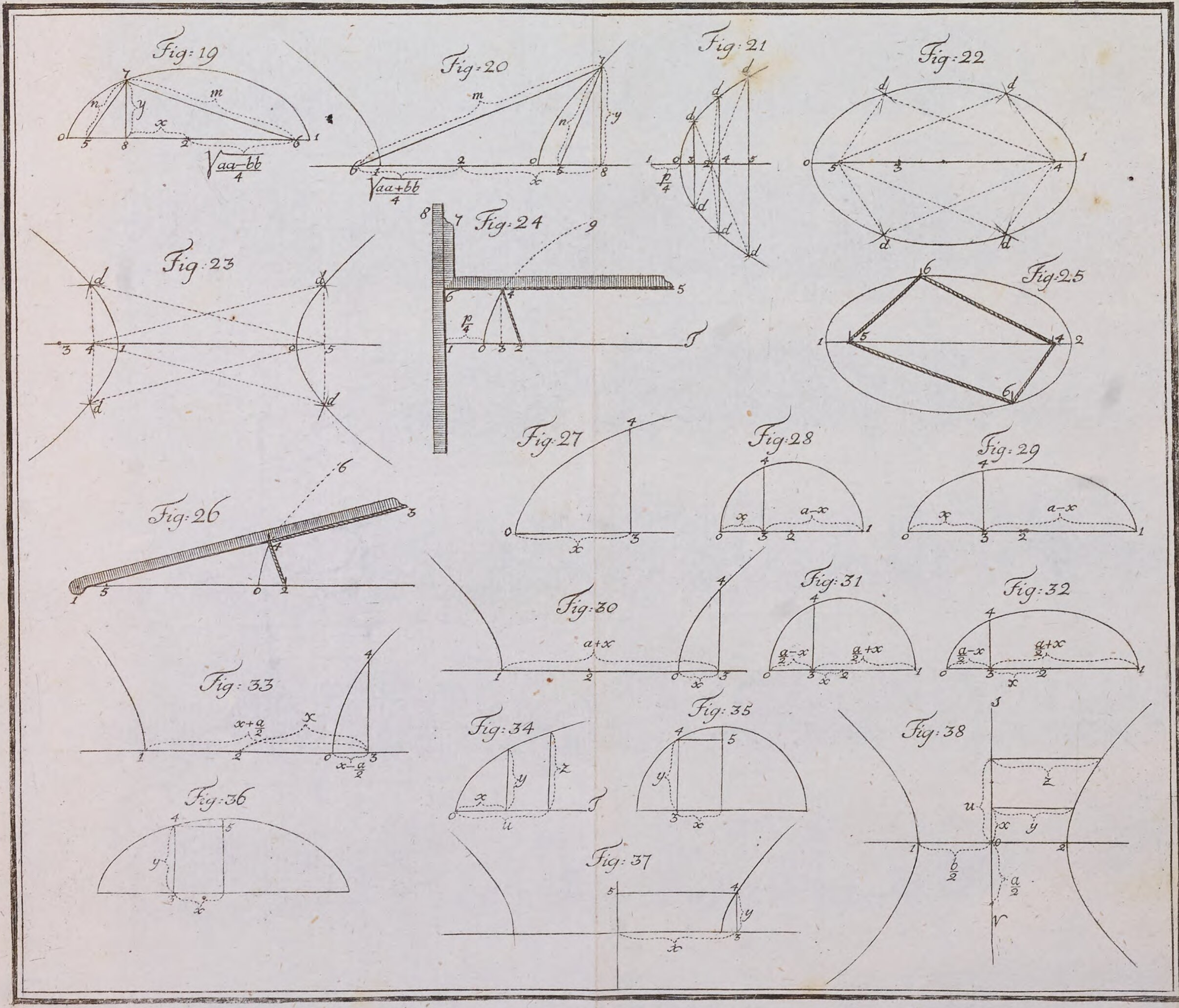


Fig: 19
Fig: 20
Fig: 21
Fig: 22
Fig: 23
Fig: 24
Fig: 25
Fig: 26
Fig: 27
Fig: 28
Fig: 29
Fig: 30
Fig: 31
Fig: 32
Fig: 33
Fig: 34
Fig: 35
Fig: 36
Fig: 37
Fig: 38

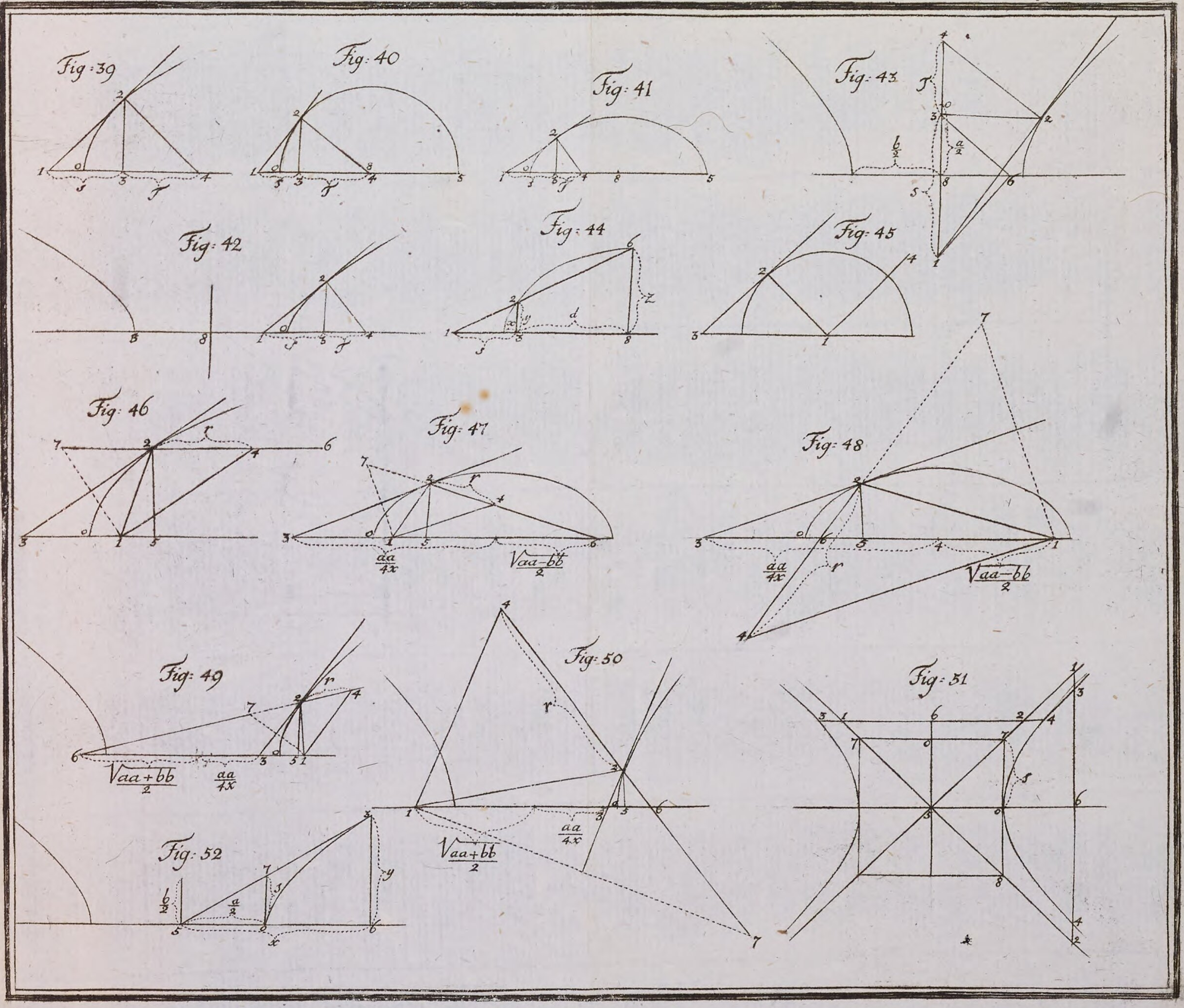


Fig: 39
Fig: 40
Fig: 41
Fig: 43
Fig: 42
Fig: 44
Fig: 45
Fig: 46
Fig: 47
Fig: 48
$\frac{aa}{4x}$
$\frac{\sqrt{aa-bb}}{2}$
Fig: 49
$\frac{\sqrt{aa+bb}}{2}$
Fig: 50
Fig: 51
Fig: 52
$\frac{b}{2}$
$\frac{a}{2}$

Taf: IV

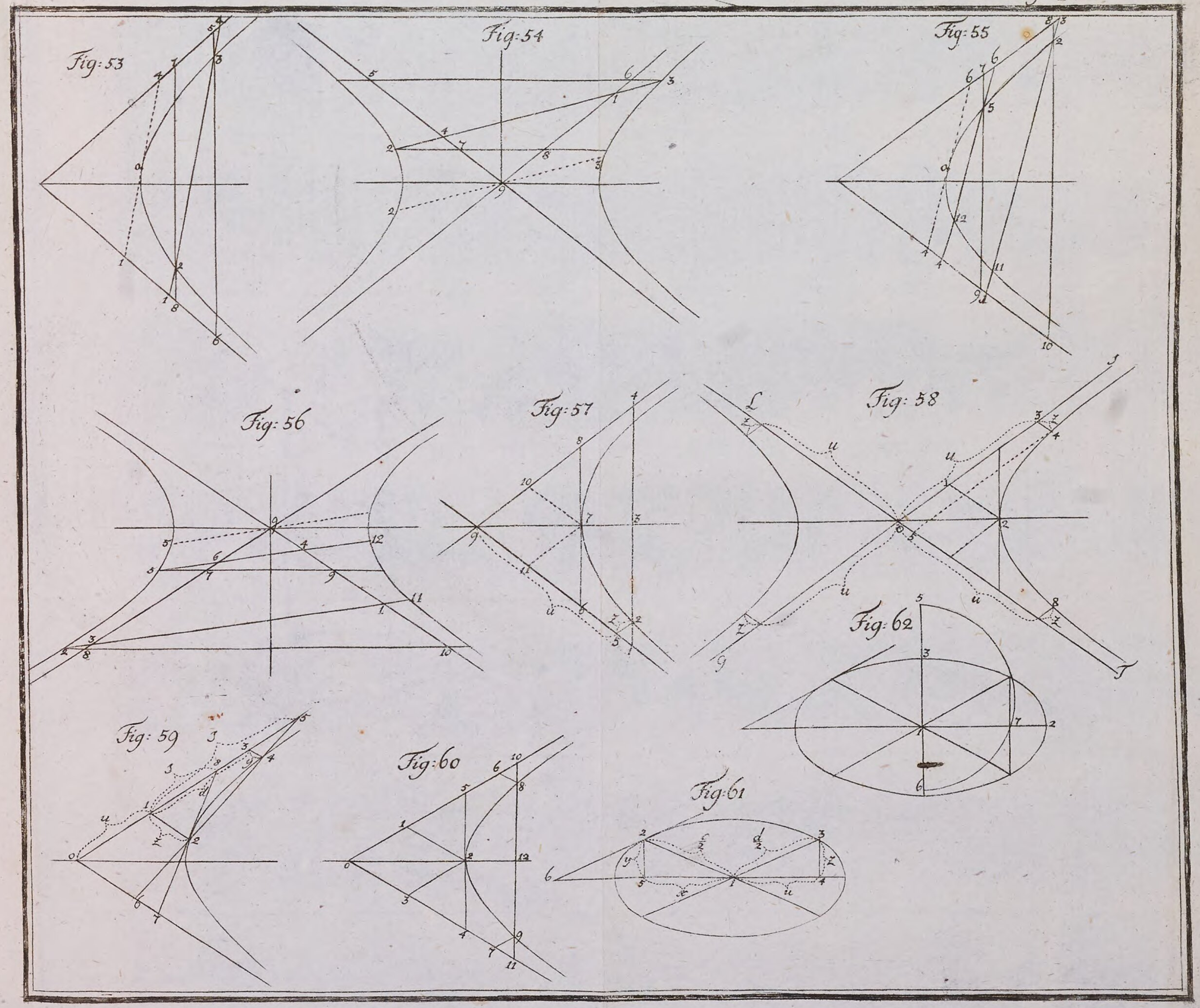
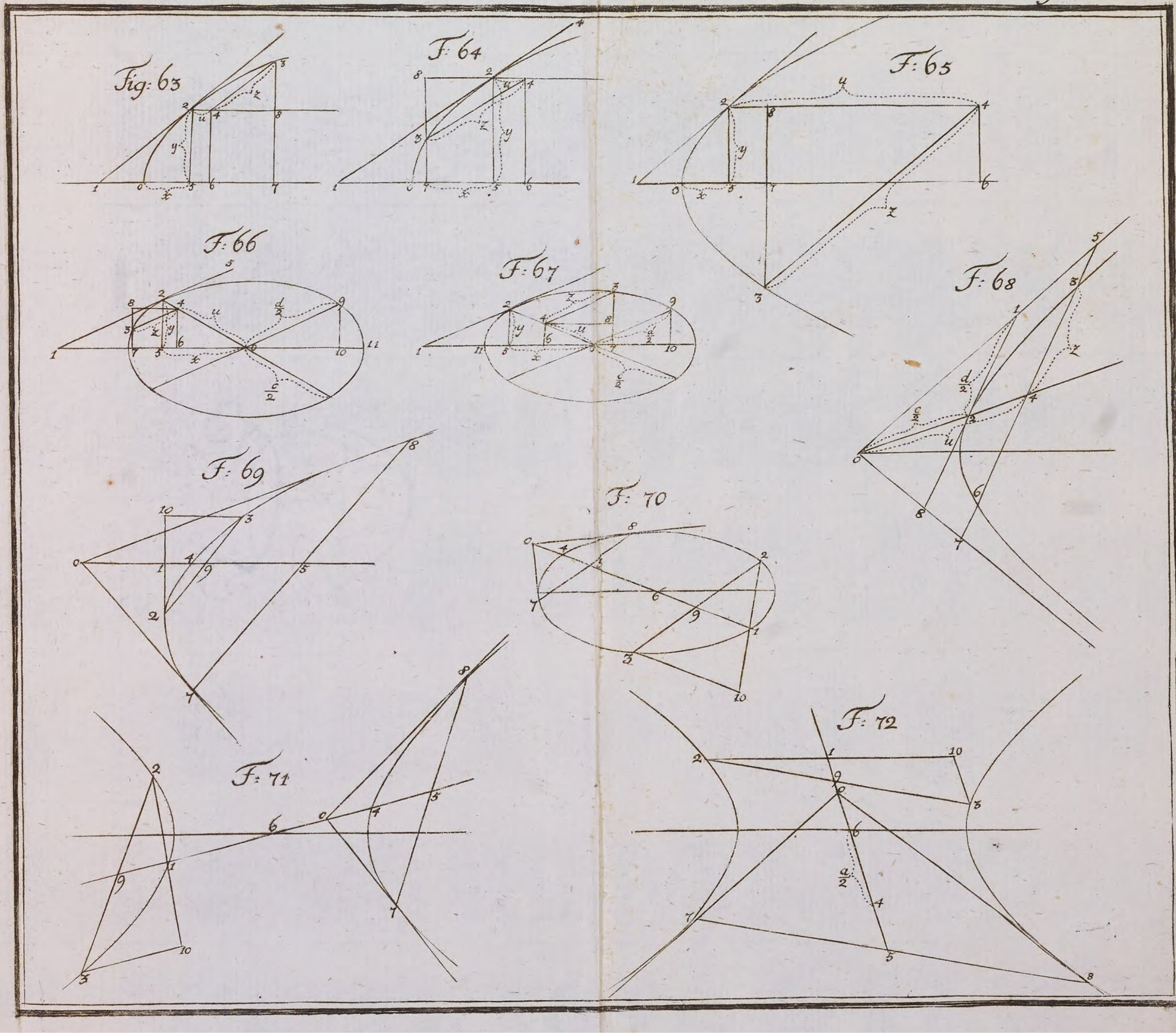


Fig: 53
Fig: 54
Fig: 55
Fig: 56
Fig: 57
Fig: 58
Fig: 59
Fig: 60
Fig: 61
Fig: 62

Taf: V



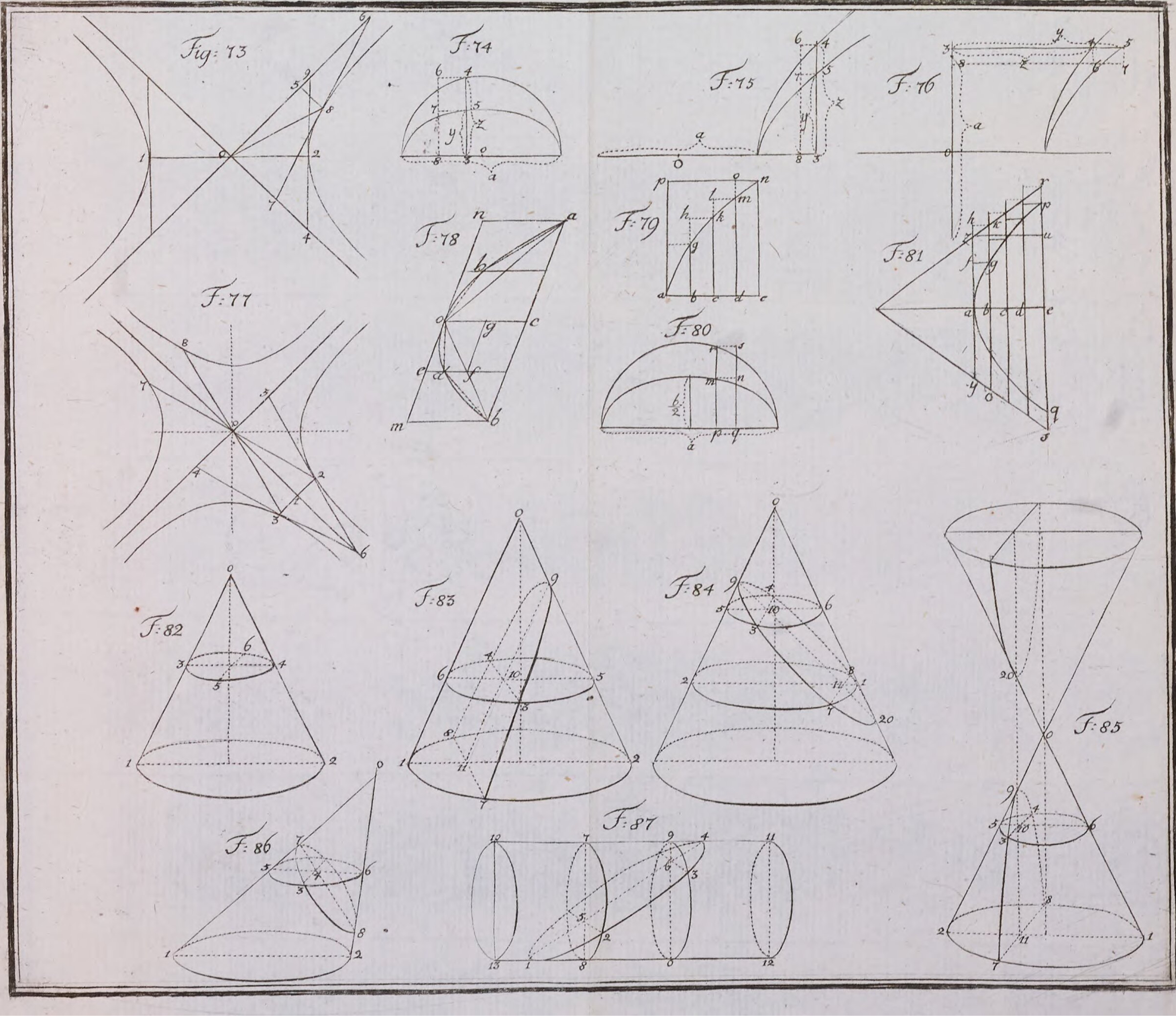


Fig: 73
F: 74
F: 75
F: 76
F: 77
F: 78
F: 79
F: 80
F: 81
F: 82
F: 83
F: 84
F: 85
F: 86
F: 87

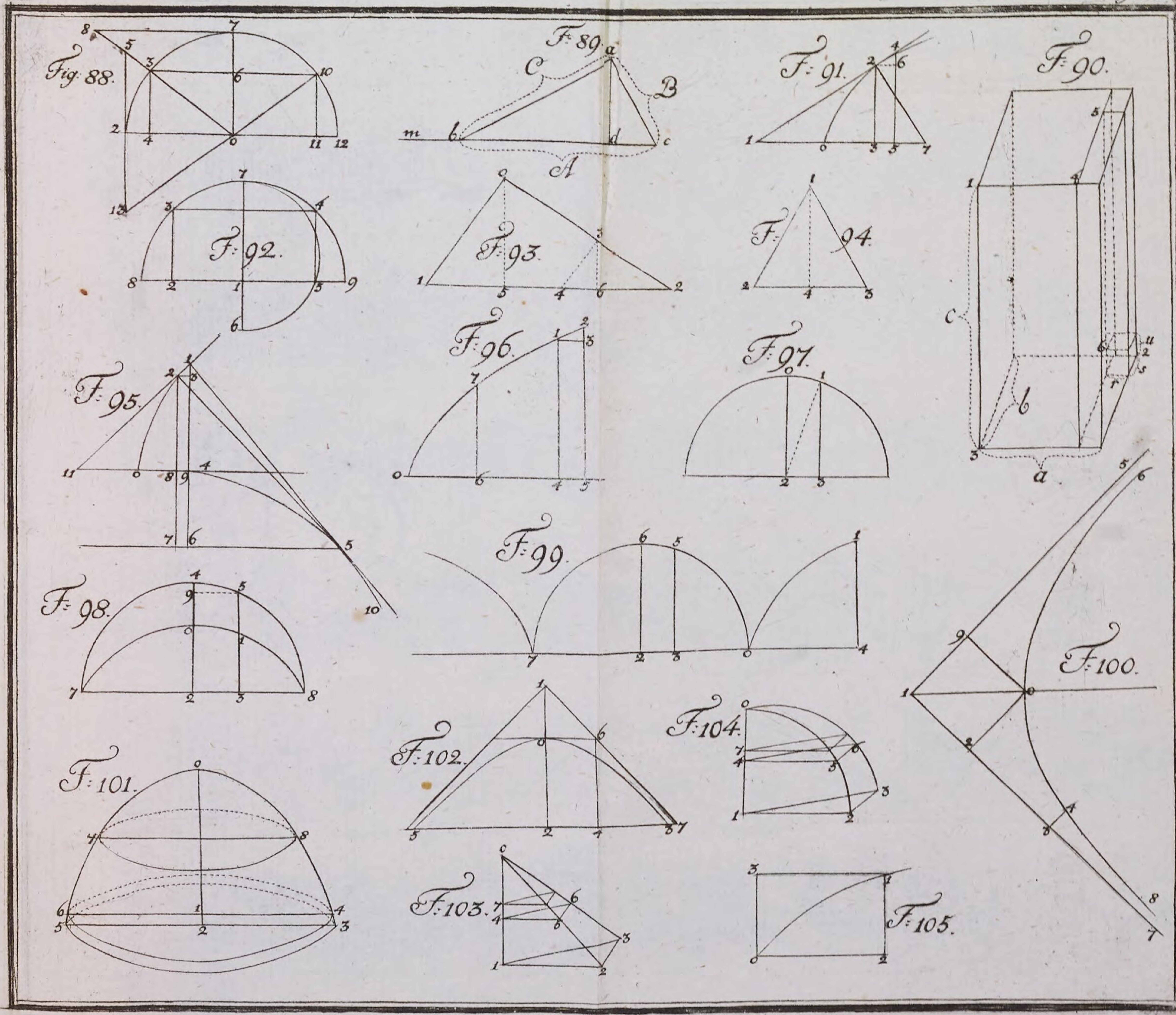


Fig. 88.
F. 89.
F. 90.
F. 91.
F. 92.
F. 93.
F. 94.
F. 95.
F. 96.
F. 97.
F. 98.
F. 99.
F. 100.
F. 101.
F. 102.
F. 103.
F. 104.
F. 105.

Fig: 106

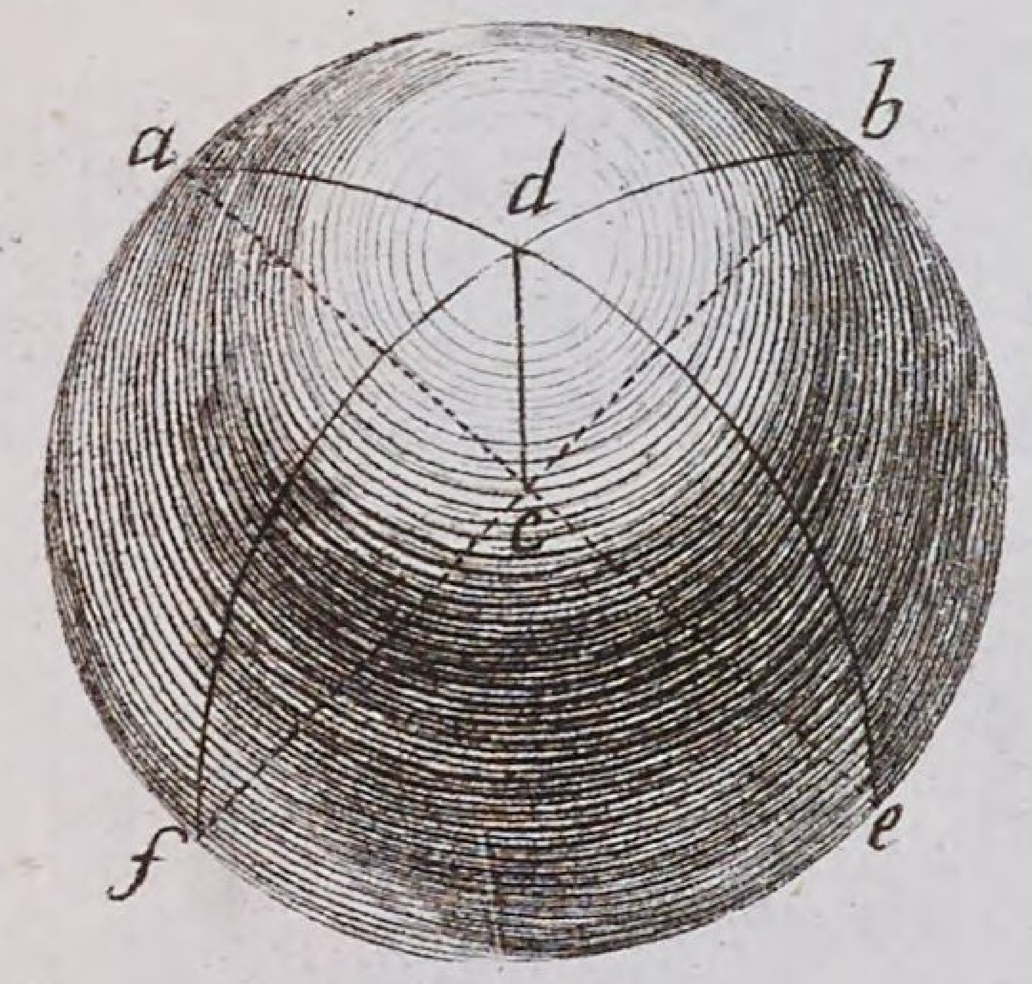


Fig: 107.

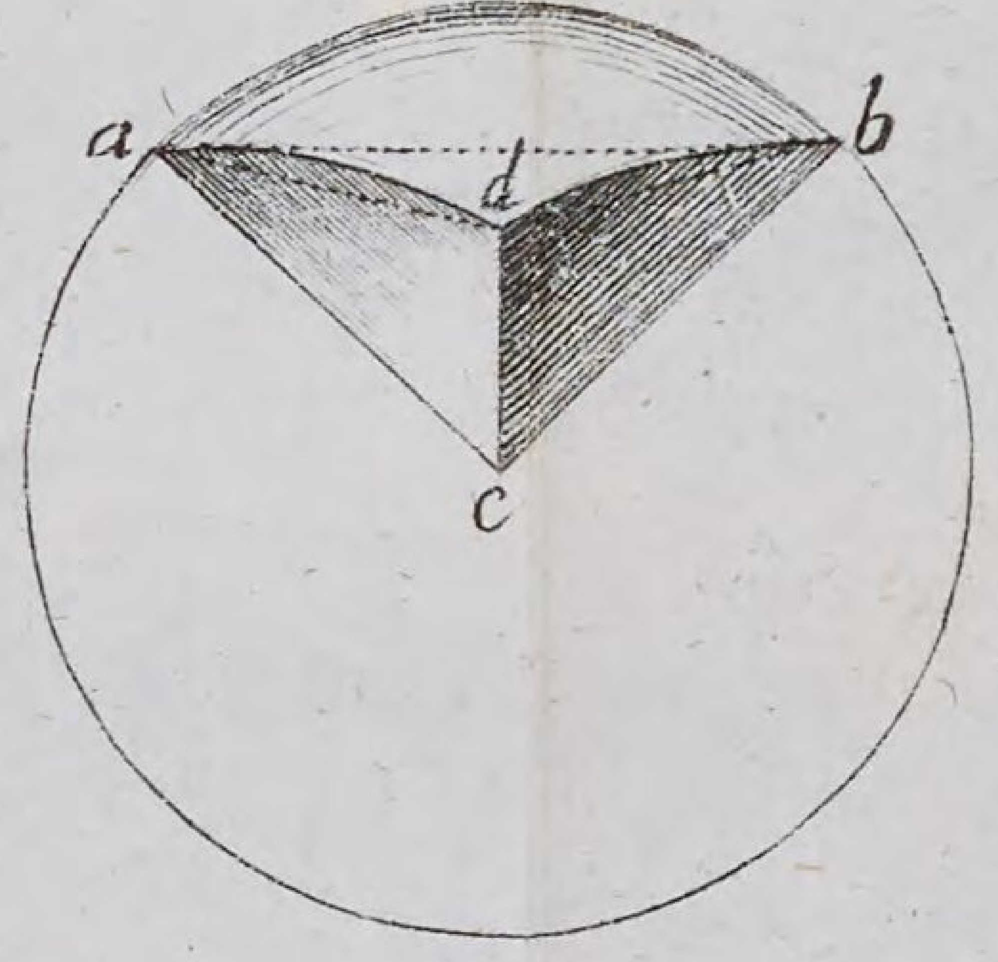


Fig: 108.

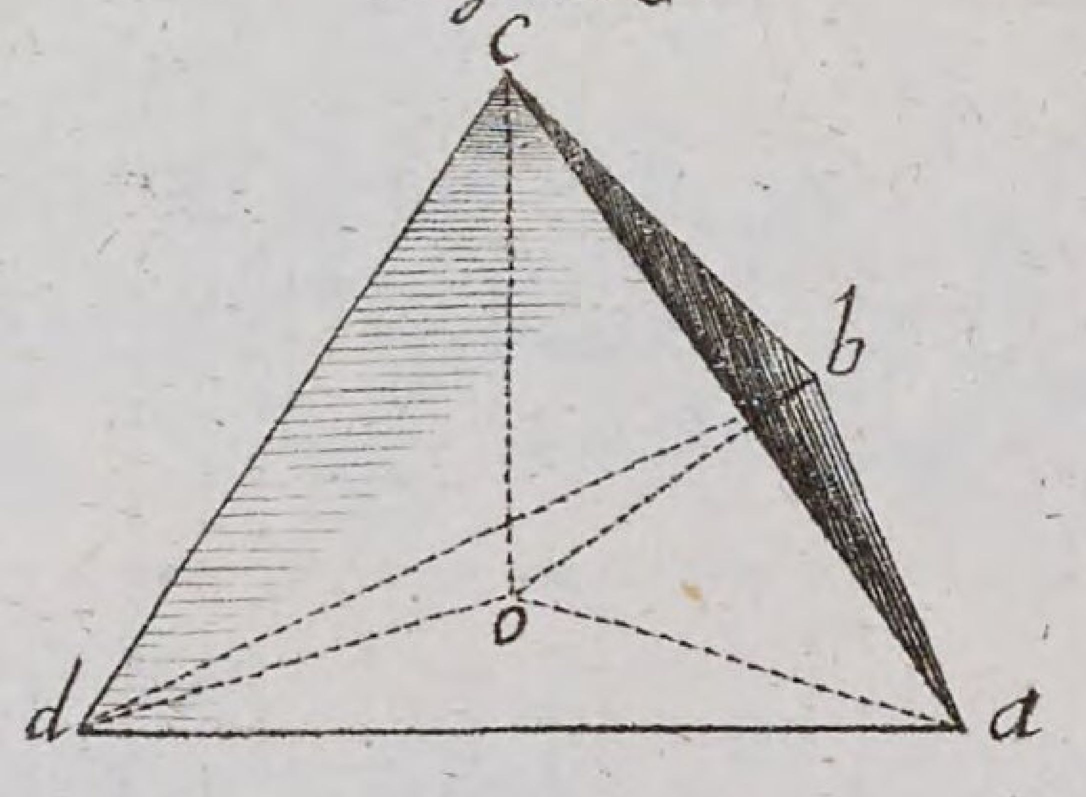


Fig: 109

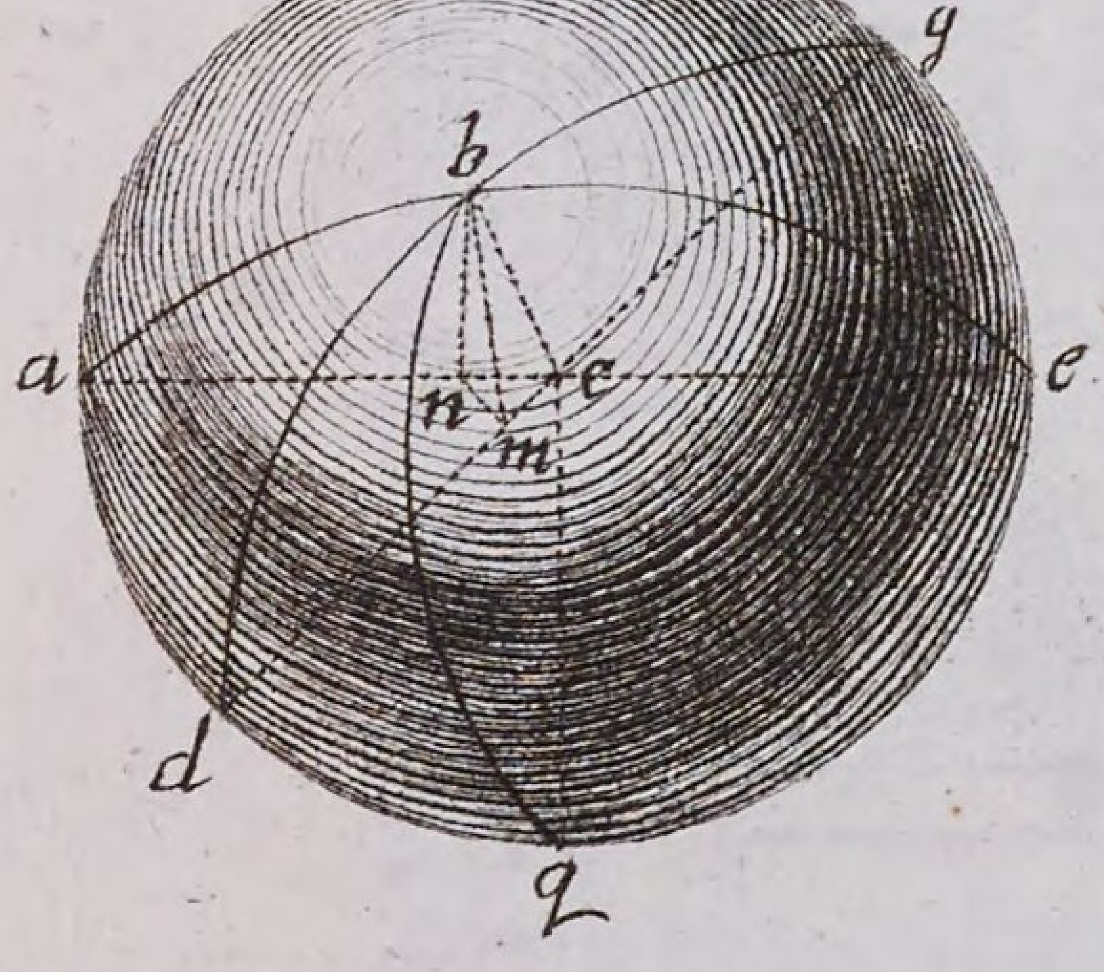


Fig: 110.

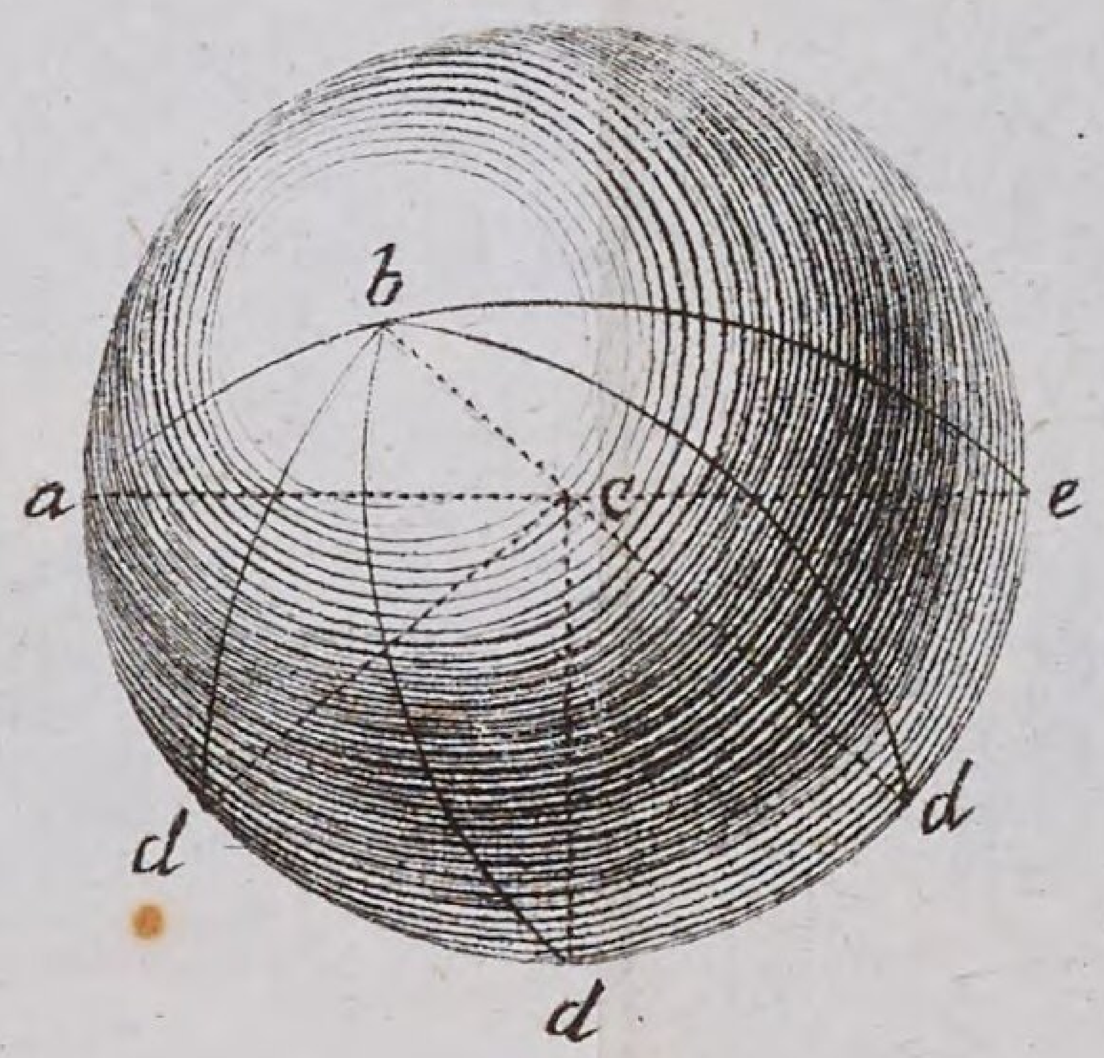


Fig: 111.

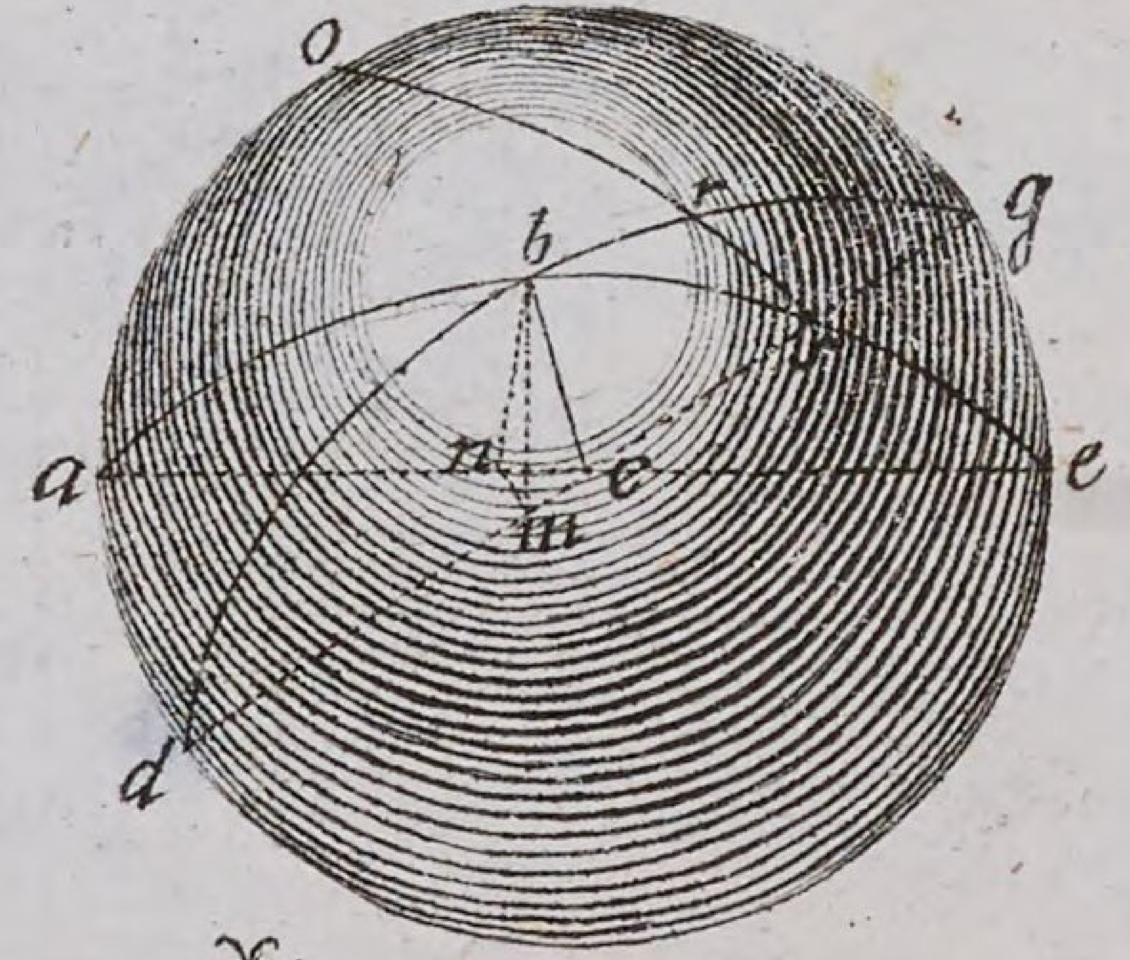
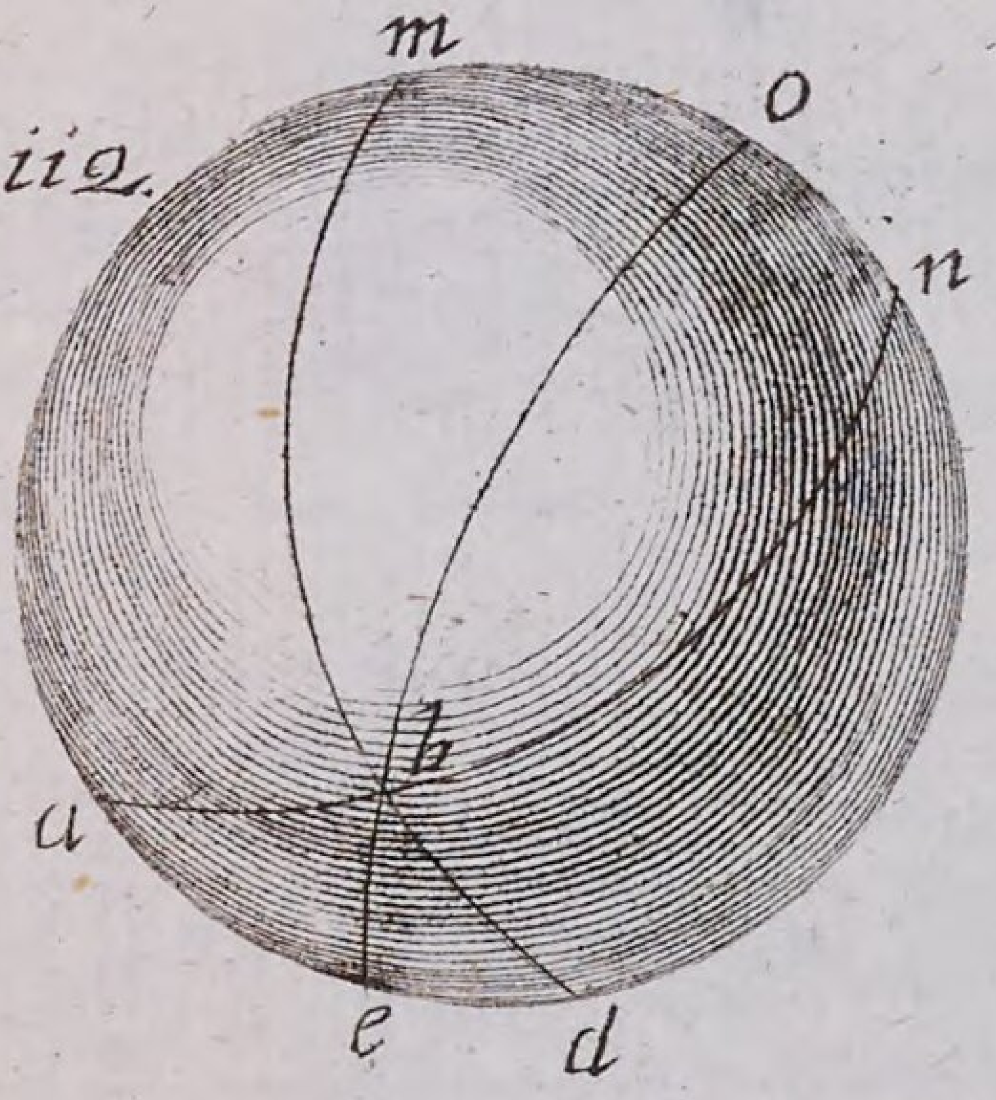


Fig: 112.



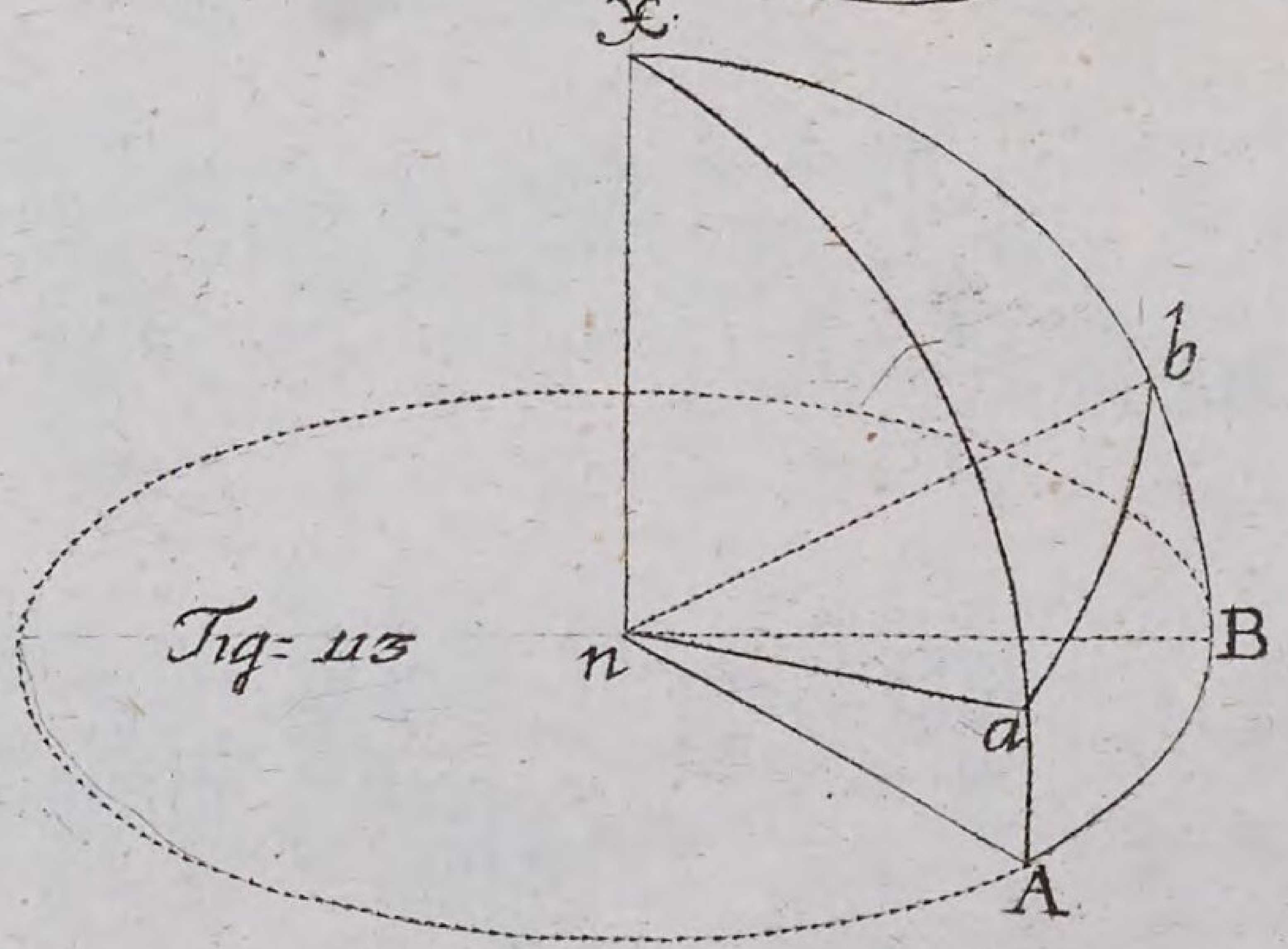


Fig: 113

8° K. 7
Hausser

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hauser, Mathias,

Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik auf hohen Befehl des Herrn Geniekorpskommandanten Feldzeugmeisters Grafen von Pellegrini Excellenz zum Gebrauche der kaiserl. königl. Ingenieursakademie
Bd.: Dritter Theil

Wien 1786

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- K-K 238 -3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11254994-5
VD18 90462696